



HAL
open science

Utilisation des valeurs propres et vecteurs propres de couplage pour étudier le comportement vibro-acoustique de systèmes couplés

François Bessac

► **To cite this version:**

François Bessac. Utilisation des valeurs propres et vecteurs propres de couplage pour étudier le comportement vibro-acoustique de systèmes couplés. Acoustique [physics.class-ph]. INSA de Lyon, 1996. Français. NNT: . tel-00132853

HAL Id: tel-00132853

<https://theses.hal.science/tel-00132853>

Submitted on 22 Feb 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée devant

L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR

Spécialité : Acoustique

*Ecole Doctorale des Sciences pour l'Ingénieur de Lyon (ECL, INSA, UCBL)
Mécanique, Energétique, Génie civil, Acoustique*

par

François BESSAC

Maître en Mécanique de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I

**UTILISATION DES VALEURS PROPRES ET VECTEURS
PROPRES DE COUPLAGE POUR ETUDIER LE
COMPOTEMENT VIBRO-ACOUSTIQUE
DE SYSTEMES COUPLES**

Soutenue le 6 mai 1996 devant la Commission d'Examen :

Jury :

M. Claude DEPOLLIER

Rapporteur

M. Jean-Claude PASCAL

Rapporteur

M. Jean KERGOMARD

M. Andy T. MOORHOUSE

M. Philippe TROMPETTE

M. Laurent GAGLIARDINI

M. Jean-Louis GUYADER

NOVEMBRE 1995

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

LISTE DES D.E.A. OU FORMATIONS DOCTORALES

FORMATION DOCTORALE	RESPONSABLE INSA	ADRESSE INSA
Acoustique	<u>Jean-Louis GUYADER</u>	Bât. 303 Tél. 80 80
Analyse et modélisation de systèmes biologiques	Paul NARDON	Bât. 406 Tél. 80 86
Automatique industrielle	<u>Serge SCAVARDA</u>	Bât. 303 Tél. 83 41
Biochimie	Michel LAGARDE	Bât. 406 Tél. 82 40
Chimie inorganique	Paul GONNARD	Bât. 504 Tél. 81 58
Conception en bâtiment et techniques urbaines	<u>Marcel MIRAMOND</u>	Bât. 304 Tél. 85 56
DEA Informatique de Lyon	Jacques KOULOUMDJIAN	Bât. 501 Tél. 80 99
Dispositifs de l'électronique intégrée	<u>Pierre PINARD</u>	Bât. 502 Tél. 82 47
Génie biologique et médical	Isabelle MAGRIN	Bât. 502 Tél. 85 63
Génie civil : sols, matériaux, physique du bâtiment	<u>Pierre LAREAL</u>	Bât. 304 Tél. 82 16
Génie électrique	Jean-Pierre CHANTE	Bât. 401 Tél. 87 26
Matériaux polymères et Composites	<u>Henri SAUTEREAU</u>	Bât. 403 Tél. 81 78
Mécanique	Gérard DALMAZ	Bât. 113 Tél. 83 03
Microstructure et comportement mécanique et macroscopique des matériaux - génie des matériaux	<u>Gérard GUENIN</u>	Bât. 502 Tél. 83 85
Productique : organisation et conduite des systèmes de production	<u>Joël FAVREL</u>	Bât. 502 Tél. 83 63
Sciences des matériaux et des surfaces	André LAUGIER	Bât. 502 Tél. 82 33
Sciences et techniques du déchet	<u>Alain NAVARRO</u>	Bât. 404 Tél. 84 30
Signal, Image, Parole	Gérard GIMENEZ	Bât. 502 Tél. 83 32
Thermique et énergétique	Monique LALLEMAND	Bât. 404 Tél. 81 54

Les responsables soulignés sont également responsables généraux.

“La science est infaillible ; mais les savants se trompent toujours”

Anatole France

A Mariette

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Monsieur le Professeur Jean-Louis GUYADER, qui a bien voulu superviser mon travail avec beaucoup d'attention et de rigueur.

Je remercie Monsieur Jacques ROLAND, Chef du Service Acoustique du Centre Scientifique et Technique du Bâtiment de m'avoir accueilli dans son service, et de m'avoir donné les moyens d'effectuer ce travail de recherche.

Mes remerciements vont ensuite à Monsieur le Professeur Claude DEPOLLIER et Monsieur Jean-Claude PASCAL qui ont bien voulu accepter d'être rapporteurs de ce travail, malgré les contraintes que cela implique.

Je remercie Messieurs les Professeurs Philippe TROMPETTE et Andy MOORHOUSE de leur lecture attentive de la thèse et de leur participation au jury.

Enfin, je remercie toutes les personnes du C.S.T.B. qui ont contribué directement ou indirectement à l'aboutissement de ce travail et tout spécialement mon responsable de thèse, Laurent GAGLIARDINI pour son foisonnement d'idées et pour la patience dont il a su faire preuve à mon égard. Je remercie aussi Dirk VAN MAERCKE le roi de la démonstration en deux lignes, Guy CHAVERIAT le prince du debuggage et Philippe JEAN, pour ses programmes de tracé aux options souvent méconnues et son humour inimitable. Merci à Jean-Claude PAVIER qui a su éviter de prendre en compte mes idées pour réaliser des montages expérimentaux qui tiennent debout. Merci à Béatrice GAUTHIER, Pierre VERRI, Claude MARTIN, Roland WETTA, Bertrand CARDINNE, ainsi que tous les stagiaires et thésards d'avoir su créer une ambiance conviviale et chaleureuse pendant ces trois ans de thèse.

SOMMAIRE

Sommaire

INTRODUCTION	19
<hr/>	
CHAPITRE 1 - COUPLAGE DE DEUX SYSTEMES A UN DEGRE DE LIBERTE	31
<hr/>	
1.1. METHODE CLASSIQUE DE RESOLUTION	34
1.2. METHODE BASEE SUR LES QUANTITES PROPRES DE COUPLAGE	37
1.2.1. Démarche fondamentale	37
1.2.2. Calcul des résidus	44
1.3. RESULTATS NUMERIQUES	46
1.3.1. Vitesses des systèmes à un degré de liberté	46
1.3.2. Valeur propre de couplage	49
1.3.2.1. <i>Fréquences de résonance</i>	49
1.3.2.2. <i>Influence de l'amortissement</i>	49
1.3.3. Vecteurs propres de couplage	51
1.4. INTERPRETATION DE LA VALEUR PROPRE DE COUPLAGE	53
1.4.1. Rapport des vitesses	53
1.4.2. Relation entre valeur propre de couplage et force de couplage	55
1.4.3. Valeur propre de couplage inférieure à un	57
1.5. APPROCHE ENERGETIQUE	59
1.5.1. Puissance échangée	59
1.5.2. Puissance injectée	64
1.6. CONCLUSION	66
<hr/>	
CHAPITRE 2 - LE FORMALISME ET LA FORMULATION	69
<hr/>	
2.1. DESCRIPTION DES SYSTEMES	72
2.1.1. Approche modale - Généralités	73
2.1.2. Vibration en flexion de la plaque mince	73
2.1.3. Caractérisation de la liaison mécanique	77

2.1.4. Efforts de couplage	79
2.1.5. Résolution classique de référence	81
2.2. NOTION DE SYSTEME “DECOUPLE BLOQUE”	83
2.3. MATRICE DE COUPLAGE	87
2.3.1. Construction de la matrice de couplage	87
2.3.2. Propriétés de la matrice de couplage	89
2.3.2.1. Paires de valeurs propres de couplage	89
2.3.2.2. Groupement des vecteurs propres de couplage	92
2.3.2.3. Permutation des coefficients du vecteur propre de couplage	92
2.4. RESOLUTION ITERATIVE D’UN PROBLEME COUPLE	93
2.5. CONCLUSION	95
CHAPITRE 3 - DEUX PLAQUES COUPLEES PAR UN SEUL RESSORT	97
<hr/>	
3.1. ETUDE DE LA VALEUR PROPRE DE COUPLAGE	100
3.1.1. Construction de la matrice de couplage	100
3.1.2. Méthode pour déterminer la valeur propre de couplage	100
3.1.3. Propriétés de la valeur propre de couplage	103
3.1.4. Résultats numériques	105
3.2. DETERMINATION DES VECTEURS PROPRES DE COUPLAGE	108
3.2.1. Expression analytique du vecteur propre de couplage	108
3.2.2. Calcul numérique du vecteur propre de couplage	110
3.3. ANALYSE PARAMETRIQUE	112
3.3.1. Influence de la raideur de la liaison sur la valeur propre de couplage	112
3.3.2. Influence de l’amortissement structural sur la valeur propre de couplage	114
3.4. RESOLUTION ANALYTIQUE	116
3.4.1. Projection des vecteurs vitesse sur le vecteur propre de couplage	116
3.4.2. Détermination des coefficients propres	117
3.4.2.1. Coefficients propres des systèmes couplés	117
3.4.2.2. Coefficients propres des systèmes découplés bloqués	118
3.4.3. Interprétation	120
3.5. CONCLUSION	122
CHAPITRE 4 - DEUX PLAQUES COUPLEES PAR N_K RESSORTS	125
<hr/>	

4.1. CALCUL DE LA REPONSE EN VITESSE DES PLAQUES A PARTIR DES QUANTITES PROPRES DE COUPLAGE GLOBALES	128
4.1.1. Définition de la matrice de couplage globale	128
4.1.2. La configuration isolée	130
4.1.3. Propriétés de la matrice de couplage globale	131
4.1.4. Calcul de la réponse en vitesse plaques	133
4.1.4.1. <i>Décomposition sur les vecteurs propres de couplage globaux</i>	133
4.1.4.2. <i>Détermination des coefficients propres des systèmes couplés ρ_{ik}</i>	135
4.2. RESOLUTION SIMPLIFIEE BASEE SUR LE CHEMIN MODAL DOMINANT	137
4.2.1. Introduction et hypothèses	137
4.2.2. Mise en œuvre et résultats	137
4.2.2.1. <i>Recherche de la valeur propre de couplage dominante</i>	137
4.2.2.2. <i>Recherche d'un coefficient propre optimisé</i>	138
4.2.3. Résultats numériques	142
4.2.3.1. <i>Valeurs propres de couplage</i>	142
4.2.3.2. <i>Réponses en vitesse obtenues par la méthode simplifiée</i>	143
4.2.4. Contrôle du chemin de transmission modal dominant	148
4.3. CALCUL DE LA REPONSE EN VITESSE DES PLAQUES A PARTIR DES QUANTITES PROPRES DE COUPLAGE ISOLEES	150
4.4. RESOLUTION SIMPLIFIEE BASEE SUR LE CHEMIN PHYSIQUE DOMINANT	153
4.4.1. Cas 1 : un des ressorts est 10 fois plus raide que les autres	153
4.4.2. Cas 2 : tous les ressorts sont de raideur identique	157
4.5. RECOMPOSITION DES QUANTITES PROPRES DE COUPLAGE GLOBALES A PARTIR DES QUANTITES PROPRES DE COUPLAGE ISOLEES	162
4.5.1. Valeurs propres et vecteurs propres de couplage isolés	162
4.5.2. Coefficients de correspondance entre les vecteurs propres de couplage isolés	163
4.5.3. Matrice de passage entre les quantités propres de couplage globales et isolées	164
4.5.4. Calcul des coefficients propres globaux des systèmes découplés bloqués $\rho_{oi k}$	166
4.6. CONCLUSION	168
CHAPITRE 5 - APPROCHE EXPERIMENTALE	171
<hr/>	
5.1. OBJECTIFS DE L'APPROCHE EXPERIMENTALE	173

5.2. DESCRIPTION SOMMAIRE DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL	174
5.3 CAS D'UNE SEULE LIAISON	176
5.3.1. Description des mesures et nomenclature	176
5.3.2. Expression mathématique de la solution	177
5.3.3. Résultats de l'expérience	180
5.3.3.1. <i>Valeur propre de couplage</i>	180
5.3.3.2. <i>Vitesses</i>	182
5.4 CAS DE 3 LIAISONS	190
5.4.1. Description des mesures et nomenclature	190
5.4.2. Reconstitution complète de la vitesse	192
5.4.2.1. <i>Méthode basée sur les quantités propres de couplage isolées</i>	192
5.4.2.2. <i>Méthode basée sur les quantités propres de couplage globales</i>	193
5.4.3. Résultats de l'expérience	194
5.4.3.1. <i>Valeurs propres de couplage</i>	194
5.4.3.2. <i>Vitesses</i>	196
5.4.4. Résolution simplifiée	201
5.4.5. Résultats de l'expérience	202
5.5. CONCLUSION	209
CONCLUSION	211
REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUES ET BIBLIOGRAPHIE	217
ANNEXE 1	227
COUPLAGE DE 3 SYSTEMES A 1 DEGRE DE LIBERTE	
ANNEXE 2	235
CALCUL DE LA VITESSE DE REFERENCE A PARTIR DES QUANTITES PROPRES DE COUPLAGE	
ANNEXE 3	239
DONNEES NUMERIQUES	
A3.1. CONFIGURATION DE BASE	241
A3.2. CHAPITRE 3 : UN SEUL RESSORT DE COUPLAGE	242
A3.3 CHAPITRE 4 : N RESSORTS DE COUPLAGE	242

ANNEXE 4 **243**

**RELATIONS ENTRE LES QUANTITES PROPRES GLOBALES
ET LES QUANTITES PROPRES ISOLEES**

A4.1. COEFFICIENTS DE CORRESPONDANCE ENTRE LES VECTEURS PROPRES DE COUPLAGE ISOLEES	245
A4.2. MATRICE DE PASSAGE ENTRE LES QUANTITES PROPRES DE COUPLAGE GLOBALES ET ISOLEES	247
A4.3. CALCUL DES COEFFICIENTS PROPRES GLOBAUX DES SYSTEMES DECOUPLES BLOQUES ρ_{oiK}	250

ANNEXE 5 **255**

CARACTERISTIQUES EXPERIMENTALES

A5.1. DESCRIPTION DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL	257
A5.1.1. Les plaques	257
A5.1.2. La condition “découplé bloqué”	259
A5.1.3. L’excitation	260
A5.1.4. Le ressort de liaison	261
A5.1.5. Les capteurs de mesure	262
A5.2. DIMENSIONNEMENTS ET CARACTERISTIQUES	264
A5.2.1. Les plaques	264
A5.2.2. Les masses bloquantes	266
A5.2.3. Les pertes par amortissement	268
A5.2.4. L’isolement vibratoire	270
A5.2.5. Les ressorts de liaison	271
A5.2.6. Pilotage de la mesure	274
A5.3. CARACTERISATION EXPERIMENTALE DES ELEMENTS	275
A5.3.1. La tête d’impédance	275
A5.3.2. La masse bloquante	276
A5.3.3. Le ressort de liaison	278
A5.3.4. La condition “découplée bloquée”	279
A5.3.5. La réciprocity	281
A5.3.6. La vitesse de la plaque 1, couplée et découplée bloquée	283

INTRODUCTION

Introduction

DEFINITION DU PROBLEME

L'industrie exprime une forte demande quant à la limitation des bruits de machines et/ou la prédiction des niveaux de bruits résultants de l'assemblage d'un système vibrant (moteur etc.) à une structure réceptrice qui aura tendance à rayonner beaucoup de bruit. La transparence acoustique des parois multiples, les transmissions latérales du son entre des locaux adjacents sont des applications de type bâtiment de la transmission vibro-acoustique entre systèmes couplés ; les plaques et leur assemblage sont les éléments les plus utilisés et les plus étudiés dans ce domaine spécifique. C'est donc l'étude de plaques couplées par un ressort qui va faire l'objet de l'étude présentée dans ce rapport afin d'éclaircir les mécanismes mis en jeu dans le couplage.

BESOIN

Actuellement, les recherches se tournent vers des méthodes de prévision de ces phénomènes vibratoires résultant du couplage de systèmes vibrants. La solution la plus pratique est de pouvoir prédire le comportement global d'une structure complexe à partir des caractéristiques des sous-structures qui la composent. En effet, les éléments de base sont souvent facilement modélisables, parce que de géométrie simple (poutres, plaques).

Pour prédire correctement ces phénomènes résultant du couplage d'éléments vibrants, il est indispensable de pouvoir analyser finement les phénomènes induits par le couplage, et ce pour l'ensemble des fréquences audibles.

Une analyse fine et une bonne compréhension des phénomènes physiques mis en jeu dans ces assemblages permettent de satisfaire une demande générale de simplification. Cette simplification passe également par la limitation du nombre d'expériences, c'est-à-dire la connaissance du nombre minimum de paramètres à mesurer pour pouvoir prévoir le comportement des systèmes après couplage.

Du point de vue numérique ou analytique, la réduction du nombre de paramètres nécessaires au calcul, la réduction du volume de calcul lui-même et la simplification de l'analyse des résultats sont des éléments attendus.

LES METHODES

SITUATION GENERALE DU PROBLEME

Les méthodes qui peuvent être appliquées pour résoudre le problème du couplage de deux systèmes vibrants sont principalement issues de la problématique des basses fréquences. Généralement, à chaque classe de problème correspond une méthode adaptée, c'est-à-dire qu'une analyse succincte de la problématique orientera les recherches vers telle méthode dédiée à un domaine de fréquences particulier ou vers telle autre apte à traiter la complexité de la structure étudiée.

La méthode des éléments finis conduit à des codes de calcul généralistes permettant d'envisager des géométries quelconques. Cette résolution fine permet de réaliser des expériences numériques, et de donner une solution de référence. Malheureusement, le maillage qu'elle utilise est dimensionné par rapport à la longueur d'onde ; dès que l'on cherche à monter en fréquence, le nombre de variable croît très rapidement et les opérations deviennent très coûteuses en temps de calcul ce qui limite la méthode au domaine des basses fréquences. D'éventuelles hypothèses simplificatrices peuvent permettre de monter un peu plus haut en fréquence, mais au détriment de la précision. On se reportera aux ouvrages de [Batoz 1990] ou de [Levy 1976] pour se familiariser avec ces méthodes variationnelles. L'article de [Atalla 1994] dresse un état de l'art complet au sujet des méthodes numériques basses fréquences, dont la méthode des éléments finis et la méthode des éléments finis de frontière, et donne de nombreuses références bibliographiques.

L'analyse modale est une méthode qui s'appuie sur le comportement modal des éléments vibrants pour étudier les interactions entre les systèmes couplés. L'ensemble des modes de vibration sert de base de résolution et ce sont les coefficients d'amplitude de chaque mode qui caractérisent les différentes grandeurs du modèle. Cette méthode fonctionne analytiquement tant que le modèle est constitué d'éléments géométriques simples ayant des conditions aux limites triviales. Un problème se pose quand on veut traiter un cas réel car toutes les structures ne peuvent pas se résumer à des assemblages de plaques simplement appuyées ou des volumes parallélépipédiques. Quand les éléments qui composent le modèle sont trop complexes pour que leur base modale soit accessible analytiquement, il est possible d'utiliser une analyse modale expérimentale pour déterminer ces modes, et ensuite effectuer le calcul selon un formalisme modal.

Les limites fréquentielles de la décomposition modale tiennent au nombre de modes pris en compte dans chaque structure : en hautes fréquences, l'abondance des modes nuit à l'efficacité de l'approche. C'est en particulier le cas dans les cavités dont la densité modale croît avec le carré de la fréquence.

Les domaines de prédilection de la décomposition modale portent sur le traitement basse fréquence des cavités qui trouve une application courante dans l'analyse des habitacles

d'automobiles [Zhang 1992] ou sans restriction, dans le couplage de trois systèmes [Liao 1993].

L'analyse modale s'adapte bien à l'étude du couplage fluide-structure entre une plaque et un volume avec [Bokil 1994] qui se base sur les caractéristiques découplées des deux éléments. Il détermine ensuite un coefficient de couplage qui permet d'introduire la dérivée du déplacement de la plaque dans l'équation du potentiel de vitesse de la cavité et vice versa. Les modes propres du système couplé sont calculés par une approche aux valeurs propres et la réponse des systèmes peut être évaluée sur presque tout le domaine fréquentiel, sauf aux résonances. L'effet du couplage mode à mode est finalement décrit et discuté. [Pan 1990] étudie le couplage fluide-structure dans un local. Il prend en compte le temps de réverbération du volume, l'exprimant en fonction "des paramètres modaux du panneau découplé et de la cavité". Il définit une matrice représentant exclusivement le couplage des modes découplés de chaque élément, ainsi qu'un coefficient de couplage. La bibliographie de l'article de [Pan 1990] est à consulter pour ce genre de problèmes.

Auparavant, [Pretlove 1965] et [Guy 1973] s'étaient intéressés au problème, ce dernier avait étudié la transparence d'une plaque à laquelle était accolée une cavité. Lui aussi avait mis en évidence un coefficient de couplage et déterminé les premiers modes couplés de la plaque. [Millot 1987] complique un peu le problème en calculant le couplage vibroacoustique de deux plaques en L et d'une cavité. Citons encore [Gagliardini 1991a, 1991b] qui établit une formulation très générale de l'analyse modale pour l'appliquer à la transmission acoustique entre deux volumes. Le couplage mode à mode suit un critère où la longueur d'onde de la plaque et de celle du volume coïncident.

La méthode des mobilités est une autre possibilité pour modéliser les structures couplées. Elle relie l'effort exercé sur un élément à sa réponse en un point précis. Si la structure est complexe et composée de plusieurs sous-systèmes, il suffit alors de caractériser chaque jonction analytiquement ou expérimentalement avant de recomposer par des équations de continuité le comportement de la structure dans son ensemble. On trouvera dans le rapport de [Pinnington 1981] une synthèse bibliographique de la méthode. Lui-même définit la mobilité d'entrée d'une poutre finie pour l'inclure dans un calcul de flux de puissance. Le modèle représente une machine rigide (une masse) posée au moyen d'un ressort sur un socle ayant des caractéristiques vibratoires (une poutre). L'étude expérimentale confirme que la force injecte un maximum de puissance quand la mobilité du récepteur passe sur des résonances. Toujours pour des calculs de flux de puissance, [Cushieri 1990] complète le modèle de jonction en abordant les couplages non ponctuels lors de l'étude de deux plaques couplées en L. Il représente alors le couplage entre les éléments par des relations de fonctions de mobilités. Les résultats comparés à la méthode des éléments finis et à la S.E.A. sont très bons. [Mondot 1987] utilise la mobilité au point de connexion source-récepteur pour

construire son modèle de descripteur de source qui est une quantité homogène à une puissance et qui est fonction uniquement de la source (mobilité et vitesse à vide). La recombinaison de l'assemblage source + récepteur se fait au moyen d'une fonction de couplage, adimensionnelle, permettant de modéliser le comportement dynamique de l'interface ; elle est fonction de la mobilité de la source et du récepteur. On cite aussi [Moorhouse 1993] qui a développé une méthodologie permettant la prédiction du bruit des machines montées sur des supports résilients à partir de quantités indépendantes telles que la vitesse libre de la machine, la raideur des supports et la mobilité du soutènement. Dans le cas de plusieurs supports, le moyennage des forces et des mobilités peut fortement réduire le volume des quantités nécessaires à la méthode sans compromettre la qualité des résultats concernant l'émission de la machine.

La méthode des mobilités est souvent utilisée parce qu'elle permet de sous-structurer les systèmes à étudier. De plus, les mobilités sont mesurables tant que l'on ne cherche pas des mobilités de moments. En revanche, les reconstructions issues de mesures de mobilités font apparaître des fréquences singulières qui pénalisent les performances de la méthode, ce qu'ont montré par exemple les travaux de [Naji 1994].

La description fine et déterministe des vibrations de structures couplées est assez utopique compte tenu des fluctuations constatées expérimentalement sur une mesure test effectuée sur des structures industriellement identiques [Rebillard 1995]. Les concepts statistiques sont donc particulièrement adaptés pour décrire ces problèmes. Il faut aussi s'intéresser à des quantités robustes comme l'énergie moyenne sur une bande de fréquence plutôt qu'à la réponse locale. A ce titre l'analyse énergétique statistique (S.E.A.) qui a été initiée par Lyon et Maidanik [Lyon 1962] permet d'étudier des structures très complexes pour lesquelles des analyses déterministes seraient trop fines et trop lourdes pour être exploitables. Pour cela, elle divise les superstructures en sous-structures dont l'énergie vibratoire est moyennée sur l'espace, le temps ou la fréquence. Certaines hypothèses restrictives permettent alors d'établir un système d'équations linéaires qui relient les énergies échangées et les puissances injectées de chaque sous-structure. Ces hypothèses concernent le couplage faible entre les éléments, la stationnarité et l'ergodicité de l'excitation et la forte densité modale des sous-structures [Lyon 1975, Fahy 1985, Hodges 1989]. La difficulté de la méthode vient de la détermination des facteurs de perte par couplage qui caractérisent l'interaction entre les éléments vibrants. On trouvera une discussion intéressante au sujet de ces hypothèses dans la revue critique faite par [Fahy 1975]. Dans le même ordre d'idées, [Woodhouse 1991a] discute de certaines hypothèses sous-jacentes de la S.E.A. comme le fait que le taux de flux d'énergie entre les sous-structures soit proportionnel à la différence de leurs énergies.

Les facteurs de pertes par couplage, qui sont les quantités caractérisant les taux d'échanges d'énergie entre les sous-structures, sont indépendants des niveaux d'excitations de

chaque sous-systèmes. [Crandall 1971] compare deux méthodes d'obtention de ces facteurs de perte, l'une par modification des fréquences propres lors de l'introduction du couplage et l'autre par le flux de puissance à travers les éléments couplés. Si pour des couplages faibles, les deux méthodes fonctionnent bien, lorsque le couplage augmente, des problèmes apparaissent. Nombreux sont les auteurs qui définissent alors un critère de couplage faible pour que la S.E.A. fonctionne. Cependant [Langley 1990] indique que la présence de couplage faible au sens habituel ne garantit pas le bon fonctionnement de la S.E.A., sachant qu'il n'existe pas de définition réellement consensuelle du couplage faible [Fahy 1982]. Langley fonde sa recherche du facteur de perte par couplage selon une approche par onde et selon une approche modale. Il donne une définition du couplage faible relativement à la fonction de Green qui fonctionne selon les deux approches. [Mace 1994] définit le couplage faible en comparant la puissance injectée dans un système à la puissance de couplage du réseau constitué par tous les sous-systèmes couplés.

Une des difficultés de la S.E.A. est la mesure des facteurs de perte par couplage. En prenant le problème à l'envers, on détermine ces facteurs de perte par couplage en établissant le bilan de puissance injectée à la structure, connaissant les caractéristiques des sous-systèmes. On parle alors de S.E.A. inverse [Bies 1980, Clarkson 1984].

Cette technique est délicate à mettre en œuvre d'une part compte tenu du grand nombre de mesures à effectuer, et surtout car le problème inverse est mal conditionné et conduit à de très grandes incertitudes sur les facteurs de perte par couplage [Jacob 1995]. Une autre approche expérimentale a été proposée par [Cacciolati 1994]. Il s'agit d'utiliser la mesure des mobilités des systèmes couplés pour en déduire par calcul le coefficient de perte par couplage. Cette méthode testée avec succès dans le cas des plaques présente l'avantage d'une mesure directe sur les systèmes vibrants couplés.

D'autres approches de type énergétique sont actuellement développées comme celle qui consiste à résoudre une équation de type conduction de la chaleur en termes de densité d'énergie vibratoire [Nefske 1987, Le Bot 1993]. Il s'agit en quelque sorte d'une S.E.A. locale [Djimadoum 1993] a appliqué cette méthode au problème de deux poutres couplées en introduisant la moyenne spatiale de l'autospectre du déplacement et sa dérivée. Les conditions aux extrémités sont déduites de l'étude locale du déplacement en fonction de la quantité moyenne précitée. L'application aux structures 2D est assez problématique et la description des structures hétérogènes l'est plus encore. Après un fort engouement pour cette approche, on note un ralentissement des études.

La méthode des coefficients d'influence énergétique [Guyader 1982] qui est basée sur une approche modale, permet elle aussi de simplifier l'approche déterministe en introduisant les énergies cinétiques moyennes de chaque sous-système tout en prenant en compte les modes globaux de la structure. Elle est fondamentalement différente de la S.E.A. dans la

mesure où elle ne fait aucune hypothèse sur la nature du couplage ni sur le type d'excitation. Ainsi, plusieurs types de couplage sont pris en compte, le couplage spatial, spectral et d'excitation ; ils permettent une compréhension plus fine des phénomènes selon l'influence des paramètres. Ces coefficients relient l'énergie moyenne d'une sous-structure à la densité spectrale de la force appliquée à une autre sous-structure. L'application de cette méthode à une jonction en L de deux plaques est bien plus rapide que l'application de la méthode des éléments finis, cependant la méthode reste limitée à un nombre restreint de sous-systèmes.

Une autre méthode fait le lien entre la méthode modale et les méthodes énergétique type S.E.A., il s'agit de l'A.M.A., "Asymptotic Modal Analysis" [Dowell 1985]. Elle s'obtient en étudiant le comportement asymptotique de l'analyse modal classique appliquée à des systèmes linéaires. Dans ce cas, avec certaines approximations ou conditions classiques, on retrouve des résultats de la S.E.A. L'application expérimentale de cette méthode a été effectuée dans le cas d'une plaque comportant des inhomogénéités de masses, confirmant le bien-fondé de la méthode [Doherty 1994].

La pertinence du choix d'une méthode pour résoudre un problème vibro-acoustique vient essentiellement du domaine de fréquence à étudier. Or, de toutes les méthodes qui viennent d'être citées, il est un domaine fréquentiel dont il n'a pas été question, les moyennes fréquences. Leur domaine d'application est défini par les incapacités des autres méthodes : c'est le domaine où les méthodes hautes fréquences (S.E.A., A.M.A.) sont trop globalisantes et où les méthodes déterministes (méthode des éléments finis, analyse modale) font manipuler des systèmes numériquement très volumineux du fait du nombre de degrés de liberté (modes). Les moyennes fréquences se trouvent entre ces deux bornes.

La philosophie des méthodes moyennes fréquences rejoint celle des méthodes simplificatrices dans la mesure où l'on cherche à réduire le nombre de données à manipuler en ne gardant que l'information pertinente. On citera la méthode de condensation par groupement modal, initiée par [Guyader 1990] où l'on regroupe les modes de vibrations de propriétés voisines en groupes dont on ne prend ensuite en compte qu'un nombre restreint. Récemment, ce sujet a été appliqué à l'étude de plaques inhomogènes et de plaques couplées [Trentin 1994a, 1994b].

Pour sa part, [Morand 1991, 1994] introduit le concept de mode hybride dans sa méthode d'hybridation modale. Chacun de ces modes est défini dans une bande de fréquence en fonction des caractéristiques du système et de l'excitation ponctuelle comme une combinaison linéaire des modes propres du système physique (lesquels n'ont pas besoin d'être calculés).

Les travaux de [Soize 1993] sur le flou structural offrent une approche particulièrement intéressante des moyennes fréquences puisqu'ils s'intéressent au couplage d'une structure maîtresse déterministe et d'un ensemble d'oscillateurs appartenant à une population de

caractéristiques réparties statistiquement. C'est cette répartition statistique du comportement vibratoire qui modélise le flou interne. Cette approche, encore en cours de développement, donne une explication de l'augmentation de l'amortissement des structures maîtresses quand elles sont équipées.

NOTRE APPROCHE, NOTRE APPORT

Comme on peut le constater, la prévision des transferts vibratoires entre systèmes couplés est une problématique qui intéresse beaucoup de chercheurs. C'est en fait un réel défi visant à prédire le bruit émis par les structures. Plusieurs voies sont exploitées sans qu'une méthode ne s'impose définitivement. Ce travail de thèse propose une démarche pour prédire les transferts vibratoires sans se restreindre à l'aspect énergétique ou à la prévision en large bande de fréquence. Le but recherché est de limiter les calculs au strict nécessaire pour avoir une prédiction raisonnable du champ vibratoire. Notre tentative vise d'abord à isoler le champ vibratoire produit par le couplage de celui issu des excitations directes. Ensuite, on détermine le chemin de transmission modal dominant, c'est-à-dire que l'on effectue en fait un tri automatique des modes vibratoires des sous-systèmes dominant le transfert.

Le concept d'une valeur scalaire adimensionnelle et indépendante de l'excitation pour décrire le couplage constitue la base de notre approche. En cela elle se différencie originalement des travaux cités dans les précédentes références.

La méthode qui a été développée se place dans le cadre de l'approche modale avec un modèle simple constitué de deux systèmes vibrants couplés en un ou plusieurs points. Des quantités originales, les valeurs propres de couplage et les vecteurs propres de couplage sont extraites. Elles sont issues de la matrice de couplage qui est une matrice adimensionnelle permettant de décrire la contribution d'un système à l'autre par le couplage. Ces quantités propres de couplage constituent un support privilégié pour la description du couplage. Elles possèdent un fort sens physique qui est mis en évidence dans la méthode du chemin modal dominant. Elles relient de plus les propriétés physiques ou géométriques (nombre de points de couplage) à des propriétés mathématiques d'opérateurs utilisés pour la résolution du problème.

L'application expérimentale de la méthode est proche d'une approche par mobilités, mais elle permet de s'affranchir des problèmes de fréquences singulières, inhérents à la méthode.

Pour mettre en forme la méthode, nous avons choisi un problème de référence, le cas de deux plaques couplées par des ressorts. On est assez loin d'une problématique de machine complexe, mais pourtant tous les ingrédients de base sont là, c'est-à-dire grande densité modale des plaques et couplage de force variable suivant les caractéristiques des ressorts.

L'intérêt pratique de ce cas est l'existence d'une base fonctionnelle analytique pour exprimer les vitesses en flexion des plaques. Il s'agit donc ici de dégager une méthodologie, de vérifier ses performances par simulation numérique, et enfin de valider expérimentalement les résultats. L'application à la conception de machines silencieuses nécessitera une généralisation qui sur le principe est simple mais posera en pratique de nouveaux problèmes à examiner attentivement.

ARTICULATION DU DOCUMENT

Cette thèse est constituée de 5 chapitres. Tout d'abord, le premier chapitre s'intéresse au couplage simple de deux systèmes à un degré de liberté. La simplicité du modèle permet de mettre en évidence sous un formalisme bien connu, les grandes lignes et les principes généraux de la méthode. Ainsi, il y est montré comment déterminer les nouvelles quantités utilisées dans la méthode : les valeurs propres et les vecteurs propres de couplage, issus de la matrice de couplage. Ces quantités seront largement étudiées pour comprendre la physique sous-jacente et pour se familiariser avec leur comportement paramétrique.

Forte de ces résultats de base, l'étude s'élargira à des modèles de complexité croissante. Le premier de ces modèles propose de coupler deux plaques (systèmes multimodaux) au moyen d'un ressort. Les chapitres 2 et 3 appliqueront la méthode du chapitre 1 selon deux phases. D'abord, le chapitre 2 fera la description des éléments du modèle, et donnera les propriétés générales de la matrice de couplage et des quantités propres. Ensuite, le chapitre 3 procédera à la reconstruction de la solution à l'aide de ces quantités propres.

Le chapitre 4 élargira le modèle en disposant plusieurs ressorts entre les deux systèmes vibrants. La méthode de résolution sera appliquée permettant de connaître les vitesses des systèmes couplés. Le sens physique des valeurs propres de couplage conduira par ailleurs à présenter une méthode simplifiée ne prenant en compte que l'information essentielle qui passe par le couplage. Des applications numériques montreront alors des résultats qui justifient la qualité de la résolution simplifiée.

Une deuxième méthode de résolution sera exposée. Elle s'appuie sur une formulation un peu modifiée qui met en jeu des quantités propres de couplage directement reliées aux ressorts de couplage. Là aussi, une méthode simplifiée sera définie, ne prenant en compte que l'information qui transite physiquement par chaque ressort. Cette méthode, basée sur des quantités quasiment directement mesurables, demande peu de calculs et est donc bien adaptée à une application expérimentale. Ses performances dépendent de la configuration du modèle. Plus les liaisons sont différenciées, mieux elle fonctionne.

Le dernier chapitre quittera l'aspect théorique de la méthode pour s'intéresser à son aspect expérimental. Le modèle multimodal sera repris et des mesures de mobilités seront

effectuées dans le but de reconstruire les quantités propres de couplage puis les vitesses des systèmes après couplage. La méthode complète de résolution puis la méthode simplifiée du chemin modal dominant seront appliquées pour déterminer quelles améliorations cette méthode apporte par rapport à des méthodes expérimentales classiques comme la méthode des mobilités.

PRESENTATION DU TRAVAIL A LA COMMUNAUTE SCIENTIFIQUE

Pour finir et pour être complet, plusieurs présentations en congrès et une publication, sont directement issus de ce travail. Par ordre chronologique, en mai 1994, au 3ème Congrès Français d'Acoustique, à Toulouse, le concept théorique a été présenté [Bessac 1994]. En mai 1995, l'article envoyé au *Journal of Sound and Vibration* a été accepté pour une publication à paraître en mai 1996 [Bessac 1996]. Il traite exclusivement de l'aspect théorique de la méthode, incluant la résolution analytique pour un seul ressort de couplage mais ne donnant qu'un résultat numérique du cas simplifié (couplage multiple). Fin juin 1995, les résultats expérimentaux complémentaires ont fait l'objet d'une communication au "15th International Congress on Acoustics" (ICA'95), à Trondheim en Norvège [Bessac 1995]. Enfin, M. Laurent Gagliardini a présenté une variante "Power flow" de la méthode au congrès "Inter-Noise 95" qui s'est déroulé début juillet 1995 à Newport Beach, aux États-Unis [Gagliardini 1995].

* * *

*

CHAPITRE 1

Couplage de 2 systèmes à 1 degré de liberté

CHAPITRE 1 - SOMMAIRE

1.1. METHODE CLASSIQUE DE RESOLUTION

1.2. METHODE BASEE SUR LES QUANTITES PROPRES DE COUPLAGE

1.2.1. Démarche fondamentale

1.2.2. Calcul des résidus

1.3. RESULTATS NUMERIQUES

1.3.1. Vitesses des systèmes à un degré de liberté

1.3.2. Valeur propre de couplage

1.3.2.1. Fréquences de résonance

1.3.2.2. Influence de l'amortissement

1.3.3. Vecteur propre de couplage

1.4. INTERPRETATION DE LA VALEUR PROPRE DE COUPLAGE

1.4.1. Rapport des vitesses

1.4.2. Relation entre valeur propre de couplage et force de couplage

1.4.3. Valeur propre de couplage inférieure à un

1.5. APPROCHE ENERGETIQUE

1.5.1. Puissance échangée

1.5.2. Puissance injectée

1.6. CONCLUSION

1. Couplage de 2 systèmes à 1 degré de liberté

Le cas du couplage de deux systèmes à un degré de liberté est abordé ici. Il s'agit d'un cas très simple qui permet de comprendre facilement les schémas de résolutions mis en œuvre dans ce chapitre, avant d'être étendus à des systèmes multimodaux dans les chapitres suivants. Ce type de démarche se justifie par le fait que les systèmes à un degré de liberté présentent une structure modale, même s'il n'y a qu'un seul mode par système. En cela, ils permettent une extension naturelle vers le couplage de systèmes multimodaux [Sharton 1968].

Dans un premier temps, la recherche de la solution est menée par la démarche classique de l'inversion de la matrice d'impédance. Elle permet de se familiariser avec les quantités utilisées en même temps qu'elle donne l'expression analytique de la solution en vitesse. Dans un deuxième temps, on mettra en œuvre le schéma de résolution qui sera utilisé et expliqué dans les chapitres suivants, avec des systèmes multimodaux et des couplages multiples.

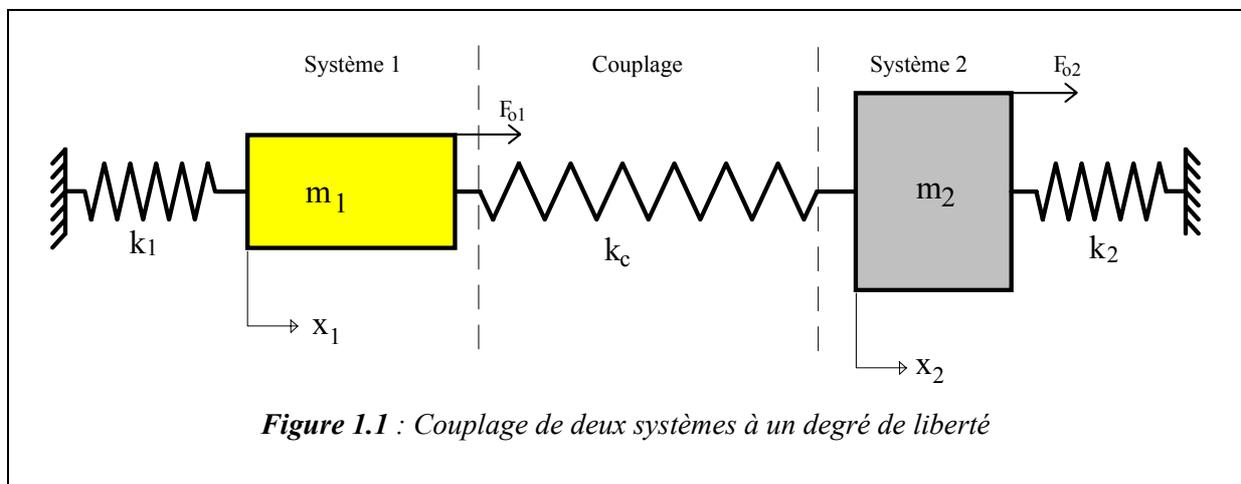
En partant des mêmes quantités que celles utilisées dans la résolution classique, on isolera une matrice ne présentant que des termes liés au couplage des deux systèmes. Cette matrice sera étudiée sous l'angle des valeurs propres et des vecteurs propres, valeurs par lesquelles on pourra reconstruire la solution en vitesse. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet, par l'analyse des quantités propres, une interprétation très physique du mécanisme de couplage. Suite à cette analyse, on montrera des résultats numériques dans différentes configurations de raideurs et de masses. En particulier, il sera démontré que lorsque la valeur propre de couplage est égale à un, il y a un couplage maximum entre les systèmes.

Un dernier paragraphe abordera les échanges d'énergie entre les deux systèmes à un degré de liberté. Il permettra de jeter les bases simples des mécanismes d'échanges énergétiques. Cette démarche énergétique, ajoutée aux acquis de la méthode utilisant les quantités propres, permettra d'accéder à des résultats intéressants et de faire un parallèle avec les méthodes énergétiques connues.

1.1 RESOLUTION CLASSIQUE

Le modèle est composé de deux systèmes à un degré de liberté, reliés entre eux par un ressort de raideur k_c . Ce ressort est le moyen de couplage proprement dit. Les masses sont reliées de manière élastique à des supports infiniment rigides par l'intermédiaire de ressorts de raideur k_i , comme le montre la Figure 1.1. Les ressorts k_i sont de raideur complexe, c'est-à-dire qu'une composante d'amortissement est prise en compte par leur intermédiaire. En revanche, k_c représente un ressort sans pertes.

Les déplacements des masses i de leur position de repos sont notés x_i et les composantes selon x des forces appliquées aux masses sont désignés par F_{oi} .



La relation fondamentale de la dynamique permet d'exprimer l'équilibre dynamique des masses en fonction des forces qui leur sont appliquées :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = k_c(x_2 - x_1) - k_1 x_1 + F_{o1} \\ m_2 \ddot{x}_2 = k_c(x_1 - x_2) - k_2 x_2 + F_{o2} \end{cases}$$

Eq. 1.1

L'excitation appliquée est de type harmonique, c'est-à-dire dépendant du terme $e^{j\omega t}$ dans lequel ω représente la pulsation. On suppose que les déplacements x_i et les accélérations \ddot{x}_i dépendent aussi par conséquent du terme $e^{j\omega t}$ (on omettra systématiquement l'écriture du terme $e^{j\omega t}$). Si l'on définit w_i comme la vitesse de déplacement, on a les relations $\ddot{x}_i = j\omega w_i$ et $w_i = j\omega x_i$ qui permettent d'écrire l'Eq. 1.1 sous une forme ne dépendant plus que des vitesses de déplacement :

$$\begin{cases} j\omega m_1 w_1 = \frac{k_c}{j\omega} (w_2 - w_1) - \frac{k_1}{j\omega} w_1 + F_{o1} \\ j\omega m_2 w_2 = \frac{k_c}{j\omega} (w_1 - w_2) - \frac{k_2}{j\omega} w_2 + F_{o2} \end{cases}$$

Eq. 1.2

Ce système de deux équations s'exprime sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{j\omega} (k_1 + k_c) + j\omega m_1 & -\frac{k_c}{j\omega} \\ -\frac{k_c}{j\omega} & \frac{1}{j\omega} (k_2 + k_c) + j\omega m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{o1} \\ F_{o2} \end{Bmatrix}$$

Eq. 1.3

Les vecteurs excitation \vec{F}_o et vitesse \vec{w} sont reliés par une matrice d'impédance dans laquelle on reconnaît des termes qui sont caractéristiques de l'impédance d'une masse, $j\omega m$ et de l'impédance d'une raideur, $k/j\omega$. Les termes non diagonaux représentent l'action de la force du système i sur la vitesse de déplacement du système j . Ils justifient ainsi l'appellation de "ressort de couplage" donnée au ressort de raideur k_c qui relie les deux oscillateurs.

La résolution classique consiste en l'inversion de cette matrice d'impédance pour obtenir les vitesses des masses. Ici, cette inversion s'effectue évidemment de manière analytique.

Dans un but de simplicité, on pose les variables Y_i , ayant une dimension identique à une mobilité :

$$\begin{cases} Y_1 = \frac{1}{\frac{k_1 + k_c}{j\omega} + j\omega m_1} \\ Y_2 = \frac{1}{\frac{k_2 + k_c}{j\omega} + j\omega m_2} \end{cases}$$

Eq. 1.4

Elle transforme l'Eq. 1.3 en :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{Y_1} & -\frac{k_c}{j\omega} \\ -\frac{k_c}{j\omega} & \frac{1}{Y_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{o1} \\ F_{o2} \end{Bmatrix}$$

Eq. 1.5

De manière classique, le vecteur vitesse de déplacement s'obtient par l'inversion de l'Eq. 1.5, inversion triviale dans le cas d'une matrice (2x2), c'est-à-dire par le calcul du déterminant de la matrice d'impédance et l'écriture de la matrice des cofacteurs :

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\left(\frac{1}{Y_1 Y_2} + \frac{k_c^2}{\omega^2} \right)} \begin{bmatrix} \frac{1}{Y_2} & \frac{k_c}{j\omega} \\ \frac{k_c}{j\omega} & \frac{1}{Y_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{o1} \\ F_{o2} \end{Bmatrix}$$

Eq. 1.6

Sous une forme développée, les composantes du vecteur vitesse s'écrivent :

$$\begin{cases} w_1 = \frac{Y_1 Y_2}{1 + \frac{k_c^2}{\omega^2} Y_1 Y_2} \left(\frac{F_{o1}}{Y_2} + \frac{k_c}{j\omega} F_{o2} \right) \\ w_2 = \frac{Y_1 Y_2}{1 + \frac{k_c^2}{\omega^2} Y_1 Y_2} \left(\frac{F_{o2}}{Y_1} + \frac{k_c}{j\omega} F_{o1} \right) \end{cases}$$

Eq. 1.7

Ces expressions de la vitesse (Eq. 1.7) seront utiles essentiellement pour être comparées au résultat obtenu par la méthode décrite dans le paragraphe suivant.

1.2. RESOLUTION PAR LA METHODE DES VALEURS PROPRES DE COUPLAGE

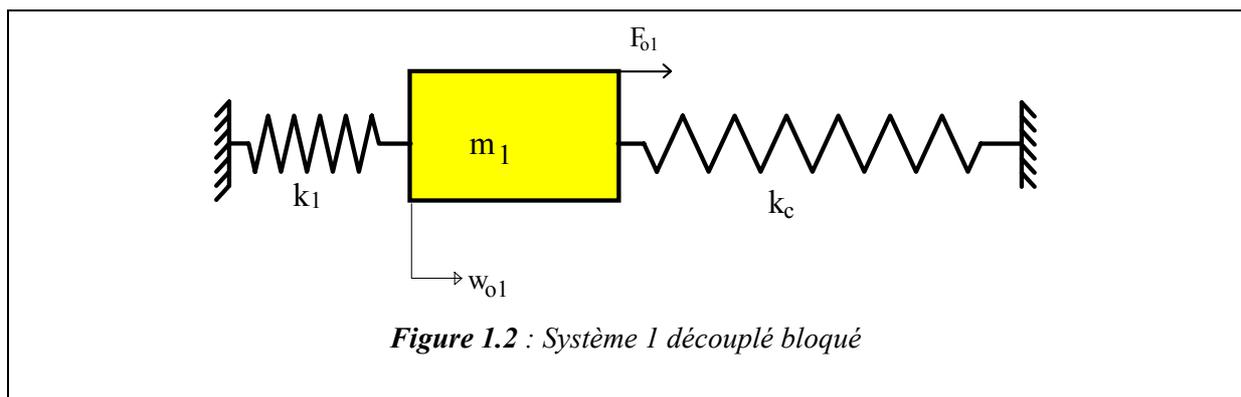
1.2.1. Démarche fondamentale

L'Eq. 1.5 est à la base de la méthode décrite maintenant. Elle est reformulée uniquement en dimension de vitesse, en divisant chaque ligne par le terme diagonal de sa matrice d'impédance, $1/Y_i$:

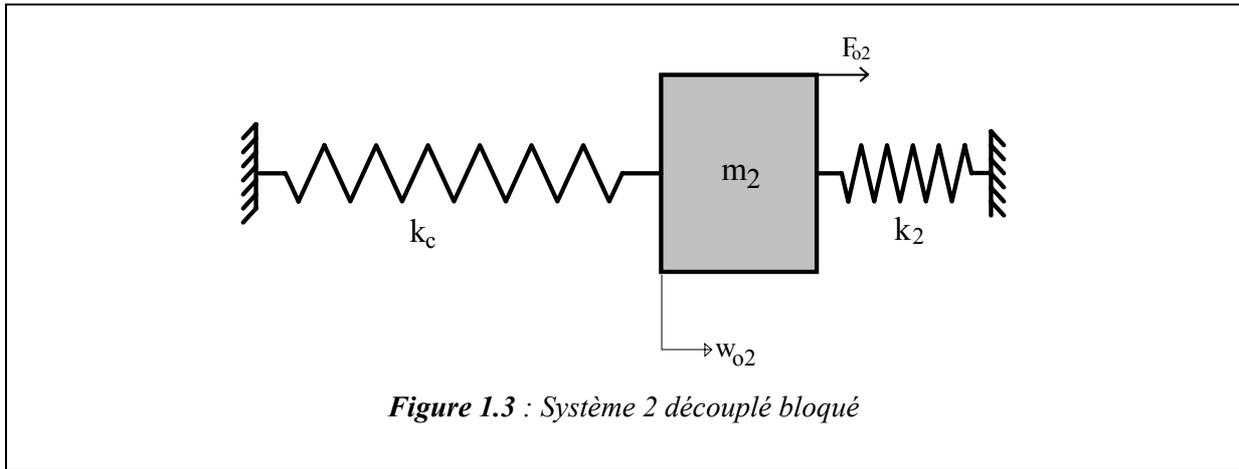
$$\begin{bmatrix} 1 & -Y_1 \frac{k_c}{j\omega} \\ -Y_2 \frac{k_c}{j\omega} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_1 F_{o1} \\ Y_2 F_{o2} \end{Bmatrix}$$

Eq. 1.8

La matrice résultante est adimensionnelle, puisque composée de quotients d'impédances (ou de mobilités). Le second membre de l'équation représente la vitesse du système i soumis à sa force d'excitation quand l'autre système est bloqué (vitesse nulle). Cette vitesse se note w_{oi} et est nommée "vitesse du système découplé bloqué". La dénomination "bloqué" vient de ce que, considérant un système, l'autre système est bloqué. L'appellation "découplé" vient de ce que le mouvement de la masse j ne peut pas avoir d'influence sur le système i puisque le système j est justement bloqué¹. La Figure 1.2 et la Figure 1.3 suivantes montrent chaque système à un degré de liberté successivement bloqué :



¹ Il faut remarquer que cette notion de système découplé bloqué est à la base de la démonstration originale de la méthode S.E.A. [Scharton 1968], par l'intermédiaire de "l'énergie totale découplée" qui est l'énergie totale d'un système soumis à une excitation aléatoire, quand l'autre est maintenu bloqué.



Le vecteur vitesse des systèmes découplés bloqués se note :

$$\begin{Bmatrix} w_{o1} \\ w_{o2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{o1} Y_1 \\ F_{o2} Y_2 \end{Bmatrix}$$

Eq. 1.9

En faisant apparaître le vecteur vitesse des systèmes couplés, l'Eq. 1.8 prend une forme telle qu'une matrice apparaît :

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{o1} \\ w_{o2} \end{Bmatrix} + \overline{\overline{C}} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix}$$

Eq. 1.10

On lui donne le nom de "matrice de couplage" :

$$\overline{\overline{C}} = \begin{bmatrix} 0 & C_{12} \\ C_{21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Y_1 \frac{k_c}{j\omega} \\ Y_2 \frac{k_c}{j\omega} & 0 \end{bmatrix}$$

Eq. 1.11

Elle est adimensionnelle et sa diagonale est nulle. Chacun de ses termes représente l'action de la vitesse de la masse 1 (respectivement 2) sur la vitesse de la masse 2 (respectivement 1). Le nom de "matrice de couplage" prend alors tout son sens, puisque cette matrice ne comporte que des termes couplant les vitesses de déplacement du système 1 au système 2 (et réciproquement)². Ceci se remarque plus aisément lorsque l'Eq. 1.10 est écrite de manière développée :

² Dans l'étude de chemins de transmissions de la S.E.A., [Magrans 1993] a donné une forme de l'énergie des sous-systèmes couplés très similaire à celle prise par l'Eq. 1.10.

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{o1} \\ w_{o2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} C_{21}w_2 \\ C_{12}w_1 \end{Bmatrix}$$

Eq. 1.12

En accord avec l'Eq. 1.11, il apparaît clairement que si le rapport $Y_i k_c / j\omega$ est faible (mobilité de la liaison grande par rapport aux mobilités des oscillateurs découplés bloqués), alors la partie relative au couplage de l'Eq. 1.12 peut être négligée, c'est-à-dire que les vitesses des masses ne s'influencent pas mutuellement. La solution en vitesse est, dans le cas d'un couplage très faible, très proche de celle des masses découplées bloquées.

La matrice de couplage décrivant les échanges entre les masses indépendamment de l'excitation, il paraît intéressant d'en extraire les quantités intrinsèques que sont les valeurs propres et les vecteurs propres.

La relation qui permet de déterminer les valeurs propres d'une matrice est rappelée ici, où λ est valeur propre et $\bar{\phi}$ vecteur propre :

$$[\bar{C} - \lambda \bar{I}] \bar{\phi} = \bar{0}$$

Eq. 1.13

Dans le cas où le vecteur propre n'est pas identiquement nul, le calcul de la valeur propre est obtenu en identifiant le déterminant de la matrice de l'Eq. 1.13 à zéro :

$$\det[\bar{C} - \lambda \bar{I}] = 0$$

Eq. 1.14

Les calculs mènent à une paire de valeurs propres appelées "valeurs propres de couplage".

$$\lambda^\pm = \pm \frac{k_c}{j\omega} \sqrt{Y_1 Y_2} = \pm \sqrt{\frac{Y_1}{Y_c}} \sqrt{\frac{Y_2}{Y_c}}$$

Eq. 1.15

La quantité Y_c se définit comme la mobilité du ressort, $Y_c = j\omega / k_c$ alors que les termes Y_i sont les mobilités des masses suspendues découplées bloquées. Ainsi, dans la deuxième expression de l'Eq. 1.15, on constate que la valeur propre de couplage est fonction du produit du rapport de la mobilité de chacune des masses découplées bloquées sur celle du ressort de couplage. Le fait le plus intéressant est que les deux rapports apparaissent sous forme d'un produit et non d'une somme ou d'un quotient. Cela a pour conséquence de rendre compte de l'influence des deux rapports de mobilité $\sqrt{Y_i / Y_c}$, sans que l'un devienne prépondérant par rapport à l'autre (cas d'une somme), et sans hiérarchisation (cas du quotient).

Une des propriétés de la trace d'une matrice est qu'elle est égale à la somme de ses valeurs propres. Dans le cas étudié, la trace de la matrice de couplage est nulle, donc la

somme des valeurs propres est nulle, ce qui est vérifié de manière triviale, les valeurs propres de couplage étant opposées.

Le fait de trouver une paire de valeurs propres de couplage opposées vient du caractère symétrique du système choisi, c'est-à-dire le montage symétrique autour du ressort de couplage³.

Le calcul des vecteurs propres de couplage s'effectue en remplaçant dans l'Eq. 1.13, les termes dont l'expression est connue. A chaque paire de valeurs propres de couplage est associée une paire de vecteurs propres de couplage. Ces deux vecteurs propres ont leurs composantes identiques en valeur absolue, mais l'une des deux parties d'un vecteur est opposée en signe à cette même partie de l'autre vecteur. Si l'on choisit arbitrairement d'opposer en signe la deuxième partie des vecteurs, alors les expressions des vecteurs propres de couplage s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} \varphi_1^{(+)} \\ \varphi_2^{(+)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{Y_1} \\ \sqrt{Y_2} \end{Bmatrix} \text{ et } \begin{Bmatrix} \varphi_1^{(-)} \\ \varphi_2^{(-)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{Y_1} \\ -\sqrt{Y_2} \end{Bmatrix}$$

Eq. 1.16

La symétrie du système, évoquée ci-dessus, permet de ne considérer plus qu'une seule valeur propre et un seul vecteur propre : soit un vecteur \vec{X} , de coordonnées a^+ et a^- dans la base des deux vecteurs propres de couplage :

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = a^+ \begin{Bmatrix} \varphi_1^{(+)} \\ \varphi_2^{(+)} \end{Bmatrix} + a^- \begin{Bmatrix} \varphi_1^{(-)} \\ \varphi_2^{(-)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (a^+ + a^-) \varphi_1^{(+)} \\ (a^+ - a^-) \varphi_2^{(+)} \end{Bmatrix}$$

Eq. 1.17

On fait apparaître les facteurs α_i , appelés "coefficients propres" ou "facteurs propres" :

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 = (a^+ + a^-) \\ \alpha_2 = (a^+ - a^-) \end{Bmatrix}$$

Eq. 1.18

On obtient une forme plus compacte pour le vecteur \vec{X} , utilisant les propriétés de signe de l'Eq. 1.16 (l'indication \pm n'ayant plus lieu d'être, elle est omise) :

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \varphi_1 \\ \alpha_2 \varphi_2 \end{Bmatrix}$$

Eq. 1.19

³ Le couplage "circulaire" de trois systèmes à un degré de liberté par trois ressorts est étudié (en raison de la lourdeur des calculs, les résultats sont reportés en Annexe 1). Cette forme de couplage donne trois valeurs propres de couplage distinctes, chaque valeur propre dépendant des caractéristiques des trois systèmes.

La matrice de couplage appliquée au vecteur \vec{X} tel qu'il vient d'être défini, provoque, l'apparition de la valeur propre de couplage et, du fait de sa forme particulière, la permutation des coefficients propres α_i :

$$\overline{\overline{C}} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \overline{\overline{C}} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \varphi_1 \\ \alpha_2 \varphi_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \alpha_2 \varphi_1 \\ \alpha_1 \varphi_2 \end{Bmatrix}$$

Eq. 1.20

Le vecteur propre de couplage peut servir à exprimer la solution. Le vecteur vitesse est projeté sur ce vecteur propre, et complété par un vecteur résidu \vec{R} qui représente la partie du vecteur vitesse qui n'est pas proportionnelle au vecteur propre de couplage.

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_1 \varphi_1 \\ \alpha_2 \varphi_2 \end{Bmatrix}$$

Eq. 1.21

Par définition des espaces vectoriels, le vecteur résidu appartient au noyau de $\overline{\overline{C}}$ et donc, l'action de $\overline{\overline{C}}$ sur ce vecteur conduit au vecteur nul :

$$\overline{\overline{C}} \vec{R} = \vec{0}$$

Eq. 1.22

Cette dernière propriété est utilisée pour éliminer le résidu dans l'Eq. 1.21 en appliquant la matrice de couplage à l'expression de la vitesse projetée dans la base du vecteur propre de couplage. Le résidu disparaît, la valeur propre apparaît et il se produit la permutation des coefficients propres α_i :

$$\overline{\overline{C}} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \alpha_2 \varphi_1 \\ \alpha_1 \varphi_2 \end{Bmatrix}$$

Eq. 1.23

L'Eq. 1.23 permet de réécrire l'expression de l'Eq. 1.10. La vitesse w_i des systèmes couplés est égale à la vitesse des systèmes découplés bloqués, w_{oi} , plus un terme décrivant le couplage uniquement au moyen des quantités propres définies ci-dessus :

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{o1} \\ w_{o2} \end{Bmatrix} + \lambda \begin{Bmatrix} \alpha_2 \varphi_1 \\ \alpha_1 \varphi_2 \end{Bmatrix}$$

Eq. 1.24

Cette relation simple montre que la valeur propre de couplage est représentative d'une caractéristique globale du couplage, qui est valable aussi bien pour le système 1 que pour le système 2.

Il reste à déterminer l'expression des coefficients propres α_i . Ceux-ci sont calculés en fonction des coefficients propres α_{oi} issus de la projection des déplacements des masses découplées bloquées sur la base du vecteur propre de couplage (de la même manière que le vecteur vitesse des systèmes couplés en Eq. 1.21) :

$$\begin{Bmatrix} w_{o1} \\ w_{o2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{o1} \\ R_{o2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_{o1}\varphi_1 \\ \alpha_{o2}\varphi_2 \end{Bmatrix}$$

Eq. 1.25

Les coefficients propres s'obtiennent en appliquant la matrice de couplage $\overline{\overline{C}}$ à l'Eq. 1.10 :

$$\overline{\overline{C}} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{o1} \\ w_{o2} \end{Bmatrix} + \overline{\overline{C}} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix}$$

Eq. 1.26

Ce qui, exprimé en fonction des facteurs propres, valeur propre et vecteurs propres de couplage donne :

$$\lambda \begin{Bmatrix} \alpha_2\varphi_1 \\ \alpha_1\varphi_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \alpha_{o2}\varphi_1 \\ \alpha_{o1}\varphi_2 \end{Bmatrix} + \lambda^2 \begin{Bmatrix} \alpha_1\varphi_1 \\ \alpha_2\varphi_2 \end{Bmatrix}$$

Eq. 1.27

En mettant les vecteurs propres en facteurs, cette dernière relation fournit un système de deux équations :

$$\begin{cases} \alpha_2 = \alpha_{o2} + \lambda\alpha_1 \\ \alpha_1 = \alpha_{o1} + \lambda\alpha_2 \end{cases}$$

Eq. 1.28

Finalement les coefficients propres α_i s'expriment en fonction des coefficients propres des systèmes découplés bloqués α_{oi} :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{\alpha_{o1} + \lambda\alpha_{o2}}{1 - \lambda^2} \\ \alpha_2 = \frac{\alpha_{o2} + \lambda\alpha_{o1}}{1 - \lambda^2} \end{cases}$$

Eq. 1.29

Il reste à trouver les coefficients propres des systèmes découplés bloqués. Pour cela, on calcule le produit de la matrice de couplage $\overline{\overline{C}}$ avec le vecteur vitesse des systèmes découplés bloqués \vec{w}_o :

$$\begin{bmatrix} 0 & C_{12} \\ C_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{o1} \\ w_{o2} \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \alpha_{o2}\varphi_1 \\ \alpha_{o1}\varphi_2 \end{Bmatrix}$$

Eq. 1.30

En remplaçant chaque variable par son expression, il vient :

$$\begin{cases} \alpha_{o1} = \frac{w_{o1}}{\sqrt{Y_1}} \\ \alpha_{o2} = \frac{w_{o2}}{\sqrt{Y_2}} \end{cases}$$

Eq. 1.31

Compte tenu de l'Eq. 1.31 et de l'Eq. 1.28, les expressions des coefficients propres α_i sont donc connues. A partir des expressions des valeurs propres et vecteurs propres de couplage, la partie de l'Eq. 1.24 qui décrit l'action du couplage se reformule de la manière suivante :

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{o1} \\ w_{o2} \end{Bmatrix} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \begin{Bmatrix} (\alpha_{o2} + \lambda\alpha_{o1})\varphi_1 \\ (\alpha_{o1} + \lambda\alpha_{o2})\varphi_2 \end{Bmatrix}$$

Eq. 1.32

L'ultime étape consiste à remplacer les variables de l'équation de l'Eq. 1.32, c'est-à-dire w_{oi} , λ , α_{oi} et φ_i par leurs expressions en fonction de k_c , Y_i et F_{oi} afin de les comparer aux expressions du déplacement obtenues par la méthode classique d'inversion de la matrice d'impédance (cf. § 1.1.). Après quelques calculs (cf. Annexe 2), on arrive à un résultat conforme à celui de l'Eq. 1.7.

Il faut préciser que les ressorts des oscillateurs sont de raideur complexe. Ils prennent en compte un facteur d'amortissement structural η par $(1+j\eta)$. Les mobilités Y_1 et Y_2 sont complexes, et donc la valeur propre de couplage, λ , l'est aussi. Ainsi, le fait que $(1-\lambda^2)$ apparaisse au dénominateur n'entraîne pas de singularité lorsque $\lambda=1$.

L'Eq. 1.32 est difficile à analyser en termes de variables indépendantes car en dehors de la valeur propre de couplage et des vecteurs propres de couplage, tous les autres termes dépendent de l'excitation par l'intermédiaire de w_o . En revanche, la décomposition sur les vecteurs propres de couplage repose sur des bases physiques fortes puisque ceux-ci caractérisent le couplage de manière intrinsèque.

On réécrit l'Eq. 1.33 sous une forme matricielle reliant la vitesse des systèmes couplés à la vitesse des systèmes découplés bloqués, de manière à isoler les composantes issues de l'excitation de celles intrinsèques au couplage :

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2} & \frac{\lambda}{1 - \lambda^2} \frac{\sqrt{Y_1}}{\sqrt{Y_2}} \\ \frac{\lambda}{1 - \lambda^2} \frac{\sqrt{Y_2}}{\sqrt{Y_1}} & 1 + \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{o1} \\ w_{o2} \end{Bmatrix}$$

Eq. 1.33

Les composantes de la matrices sont indépendantes de l'excitation. On constate que la vitesse d'un système couplé dépend de sa vitesse découplée bloquée, de la vitesse de l'autre système découplé bloqué (à un facteur $\lambda/(1-\lambda^2)$ près) et de sa propre vitesse découplée bloquée pondérée par $\lambda^2/(1-\lambda^2)$. Si la valeur propre de couplage est faible, alors, au premier ordre, la vitesse du système couplé est égale à la vitesse du système découplé bloqué.

Il faut aussi noter que le rapport $\sqrt{Y_2}/\sqrt{Y_1}$ qui existe entre w_2 et w_{o1} (par exemple), présente une pic à la fréquence de résonance de l'oscillateur 2 découplé bloqué, qui correspond alors au système récepteur (puisque c'est la composante excitatrice du système 1).

1.2.2. Calcul des résidus

Tous les éléments nécessaires à une investigation des résidus définis par l'Eq. 1.21 et l'Eq. 1.25 sont maintenant disponibles. Les expression des coefficients propres et du vecteur propre de couplage sont introduites dans l'Eq. 1.25, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} w_{o1} \\ w_{o2} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} R_{o1} \\ R_{o2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_{o1}\varphi_1 \\ \alpha_{o2}\varphi_2 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} R_{o1} \\ R_{o2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{w_{o1}}{\sqrt{Y_1}} \sqrt{Y_1} \\ \frac{w_{o2}}{\sqrt{Y_2}} \sqrt{Y_2} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Eq. 1.34

Elle indique trivialement que le résidu associé à la vitesse des systèmes découplés bloqués est nul.

En ce qui concerne le résidu associé au vecteur vitesse des systèmes couplés, l'Eq. 1.24 introduite dans l'Eq. 1.21 permet d'écrire la relation suivante :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_1\varphi_1 \\ \alpha_2\varphi_2 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} w_{o1} \\ w_{o2} \end{Bmatrix} + \lambda \begin{Bmatrix} \alpha_2\varphi_1 \\ \alpha_1\varphi_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_1\varphi_1 \\ \alpha_2\varphi_2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Eq. 1.35

Le résidu R_0 étant nul, l'expression de la vitesse des systèmes découplés bloqués se remplace directement par son expression en fonction des quantités propres :

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_{o1}\varphi_1 \\ \alpha_{o2}\varphi_2 \end{Bmatrix} + \lambda \begin{Bmatrix} \alpha_2\varphi_1 \\ \alpha_1\varphi_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_1\varphi_1 \\ \alpha_2\varphi_2 \end{Bmatrix}$$

Eq. 1.36

La mise en facteur des vecteurs propres mène à :

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\alpha_{o1} + \lambda\alpha_2 - \alpha_1)\varphi_1 \\ (\alpha_{o2} + \lambda\alpha_1 - \alpha_2)\varphi_2 \end{Bmatrix} = 0$$

Eq. 1.37

En effet, on reconnaît dans l'Eq. 1.36, la relation entre les coefficients propres de l'Eq. 1.28 qui indique que finalement le résidu est nul. Ceci ne démontre pas que dans un cas général le résidu soit toujours nul mais que dans le cas du couplage de deux systèmes à un degré de liberté, le vecteur propre de couplage est tel qu'il représente exactement la forme du vecteur vitesse des systèmes couplés. En outre, cela corrobore l'assertion selon laquelle le vecteur propre de couplage représente le chemin de transmission du couplage.

1.3. APPLICATIONS NUMERIQUES

Ce paragraphe montre des applications numériques de base concernant les vitesses des systèmes couplés ou découplés bloqués, la valeur propre de couplage et le vecteur propre de couplage.

Le Tableau 1.1 suivant donne les valeurs de base des grandeurs physiques qui caractérisent les éléments du modèle choisi pour les applications numériques à venir. On ne signalera par la suite que la modification de l'une ou de l'autre de ces grandeurs.

	Système 1	Système 2
Raideur du ressort (N.m ⁻¹)	60 000	40 000
Pertes par les ressorts	1 %	1 %
Masse (kg)	1,3	4
Force d'excitation (N)	100	100
Raideur du ressort de couplage (N.m ⁻¹)	90 000	

Tableau 1.1 : Valeurs numériques de base pour le couplage des 2 systèmes à 1 degré de liberté

1.3.1. Vitesses des systèmes à un degré de liberté

La Figure 1.4 (resp. Figure 1.5) représente les modules de la vitesse du système 1 (resp. 2) couplé et découplé bloqué. On constate que le couplage décale les fréquences de résonance des systèmes couplés vers le bas pour la résonance basse et vers le haut pour la résonance haute.

Lorsque la raideur du ressort de couplage augmente, la fréquence propre du système découplé bloqué augmente aussi. Cette fréquence s'écrit :

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_i + k_c}{m_i}}$$

Eq. 1.38

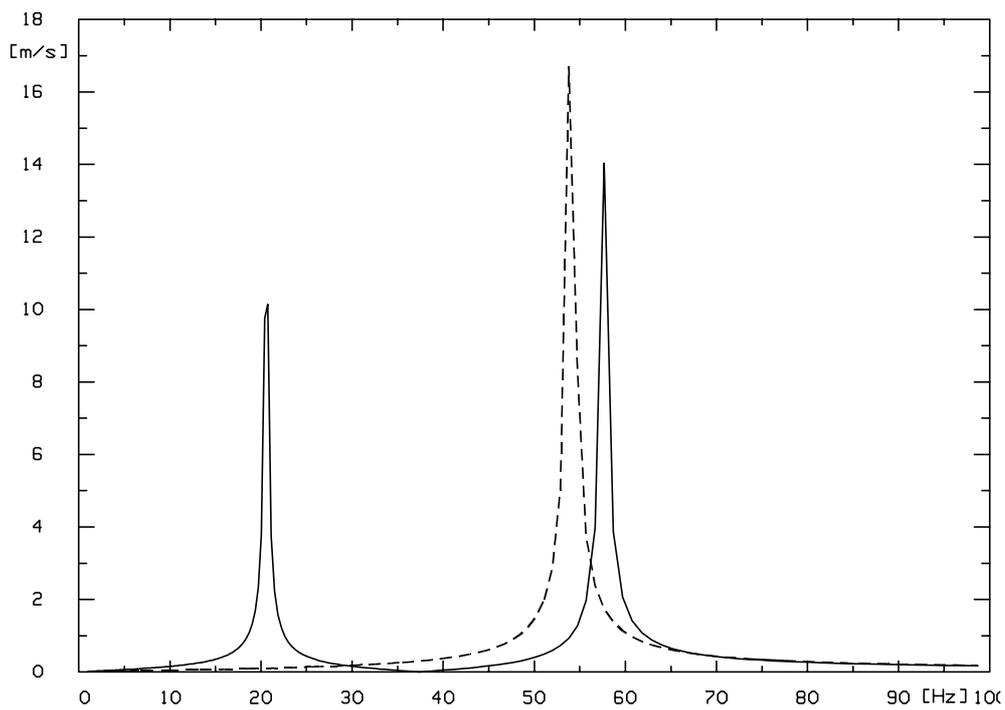


Figure 1.4 : Module de la vitesse du système 1 en fonction de la fréquence
Vitesse du système 1 couplé (—) ; Vitesse du système 1 découplé bloqué (- - -)

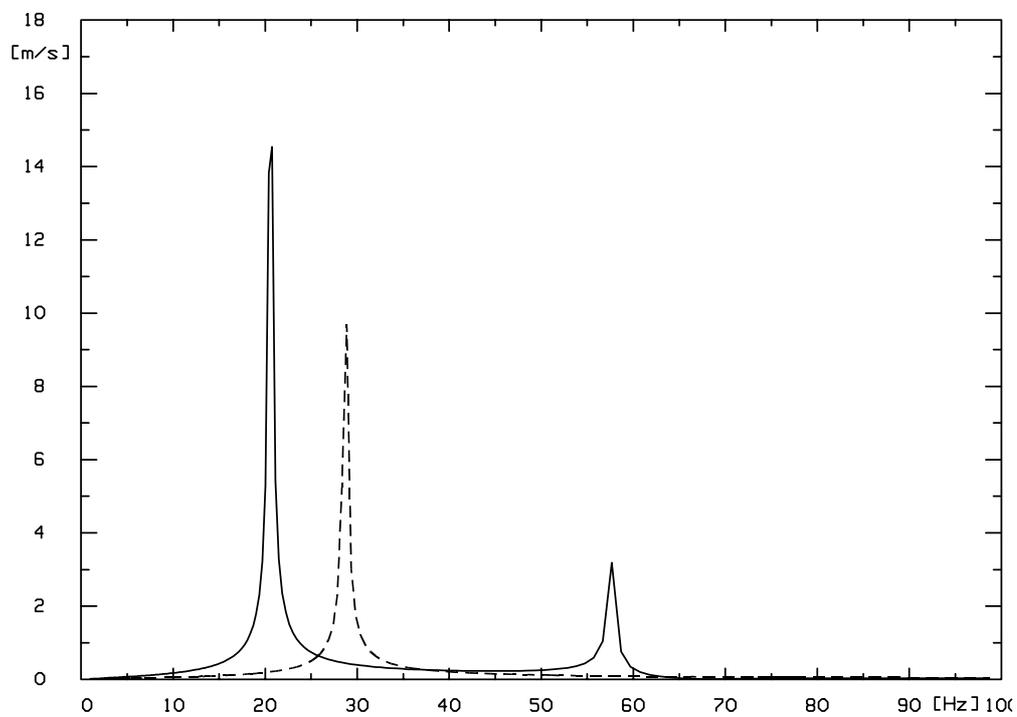


Figure 1.5 : Module de la vitesse du système 2 en fonction de la fréquence
Vitesse du système 2 couplé (—) ; Vitesse du système 2 découplé bloqué (- - -)

Ceci est vrai pour les deux systèmes découplés bloqués. A la limite, quand les masses sont identiques et quand la raideur du ressort de couplage est extrêmement élevée par rapport aux raideurs de k_1 et k_2 (qui en deviennent négligeables), les pics de résonance de chaque système découplé bloqué sont confondus.

En ce qui concerne les fréquences correspondant aux résonances des systèmes couplés, les deux pics viennent du terme issu du déterminant de la matrice d'impédance (cf. § 1.1). Pour mémoire, ce terme est le suivant :

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{Y_1 Y_2} + \frac{k_c^2}{\omega^2} \right)}$$

Eq. 1.39

En remplaçant les termes de l'Eq. 1.39, on en déduit que les deux fréquences qui annuleraient le dénominateur si celui-ci était réel, sont celles qui sont solutions de l'équation du deuxième degré suivante (avec $\Omega=2\pi f$) :

$$\Omega^2 - \Omega \left(\frac{(k_2 + k_c)}{m_2} + \frac{(k_1 + k_c)}{m_1} \right) + \frac{1}{m_1 m_2} (k_1 k_2 + k_1 k_c + k_2 k_c) = 0$$

Eq. 1.40

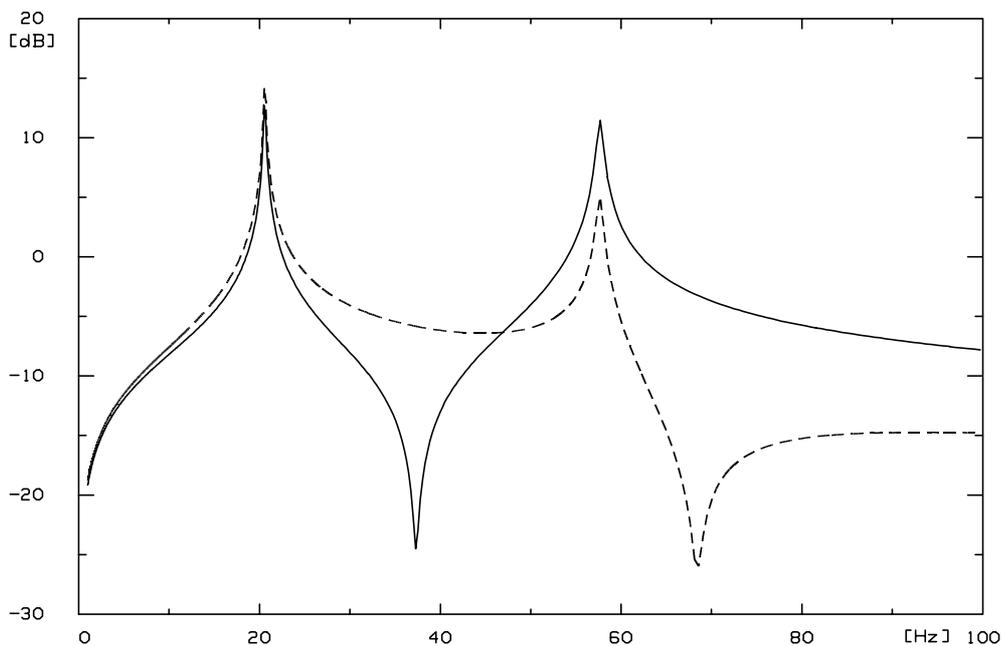


Figure 1.6 : Modules des vitesses couplées du système 1 (—) et du système 2 (- - -) en fonction de la fréquence

La Figure 1.6 montre la représentation en fréquence des vitesses des systèmes couplés, avec les ordonnées en décibels. On constate qu'il existe, en plus des deux pics de résonance qui viennent d'être évoqués, une anti-résonance pour chaque système à un degré de liberté. Celle-ci provient de l'Eq. 1.7 et des termes F_{oi}/Y_2 pour le système 1 et F_{oi}/Y_1 pour le système 2.

1.3.2. Valeur propre de couplage

1.3.2.1. Fréquences de résonance

La Figure 1.7 représente les modules de la valeur propre de couplage, λ et des vitesses des deux systèmes découplés bloqués w_{oi} en fonction de la fréquence. On constate que leurs pics de résonance sont aux mêmes fréquences, ce qui est logique compte tenu de leurs expressions mathématiques. En effet, l'expression de la valeur propre de couplage se développe comme suit :

$$\lambda^{\pm} = \pm \frac{k_c}{j\omega} \sqrt{Y_1 Y_2} = \frac{\pm k_c}{\sqrt{(k_1 + k_c - m_1 \omega^2)(k_2 + k_c - m_2 \omega^2)}}$$

Eq. 1.41

L'Eq. 1.41 montre bien que les maxima de λ se produisent aux mêmes fréquences que les résonances des systèmes découplés bloqués⁴ selon l'expression Eq. 1.38.

La Figure 1.8 montre les modules de la valeur propre de couplage et des vitesses de systèmes couplés. Comme les fréquences des maxima de la valeur propre de couplage sont identiques aux fréquences de résonance des systèmes découplés bloqués, on constate que ces fréquences sont donc toujours comprises entre les fréquences de résonances des vitesses des systèmes couplés. La valeur propre de couplage permet ainsi de définir une zone où l'on est sûr qu'il n'y aura pas de pics de résonance quand les systèmes seront couplés.

1.3.2.2. Influence de l'amortissement

Les oscillateurs sont pourvus d'un facteur d'amortissement hystérétique η , de la forme $(1+j\eta)$. Ainsi, les raideurs k_i étant complexes, il ne se produit pas d'indétermination à la résonance des systèmes découplés bloqués. La valeur du facteur est par défaut 1%. On effectue le calcul de la valeur propre de couplage selon trois valeurs de cet amortissement : 1%, 5%, 10%. Les résultats sont reportés en Figure 1.9 :

⁴ L'Annexe 1 donne un résultat identique : les trois valeurs propres de couplage présentent des pics aux fréquences de résonance des systèmes découplés bloqués.

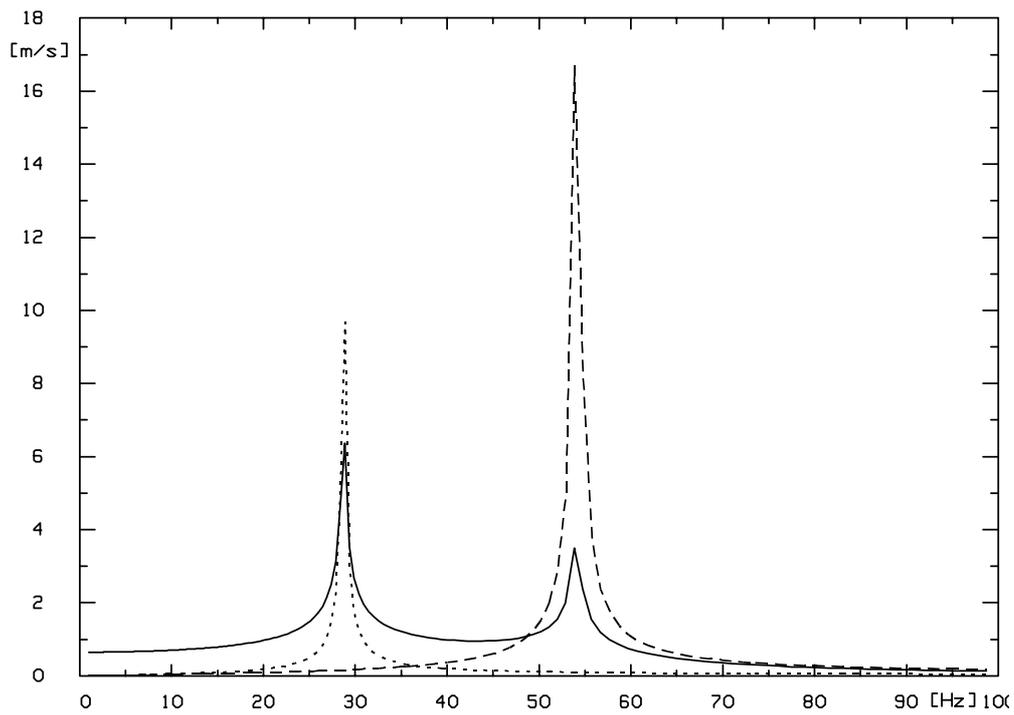


Figure 1.7 : Modules de la valeur propre de couplage (—) et des vitesses découplées bloquées du système 1 (- - -) et du système 2 (.....) en fonction de la fréquence

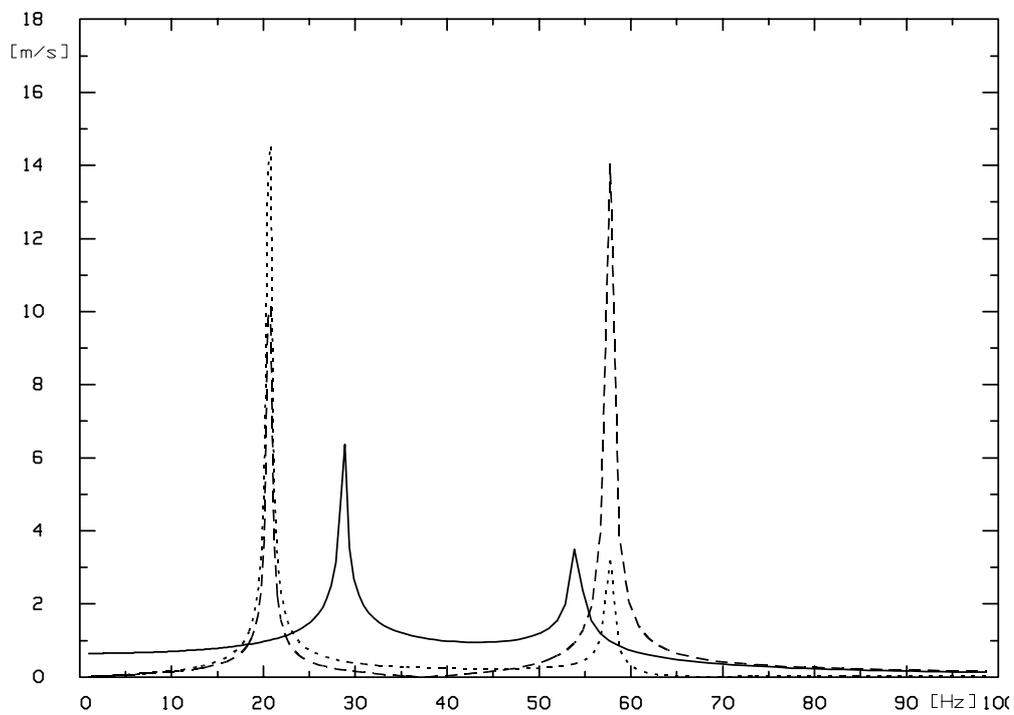


Figure 1.8 : Modules de la valeur propre de couplage (—) et des vitesses des systèmes 1 couplé (- - -) et 2 couplé (.....) en fonction de la fréquence

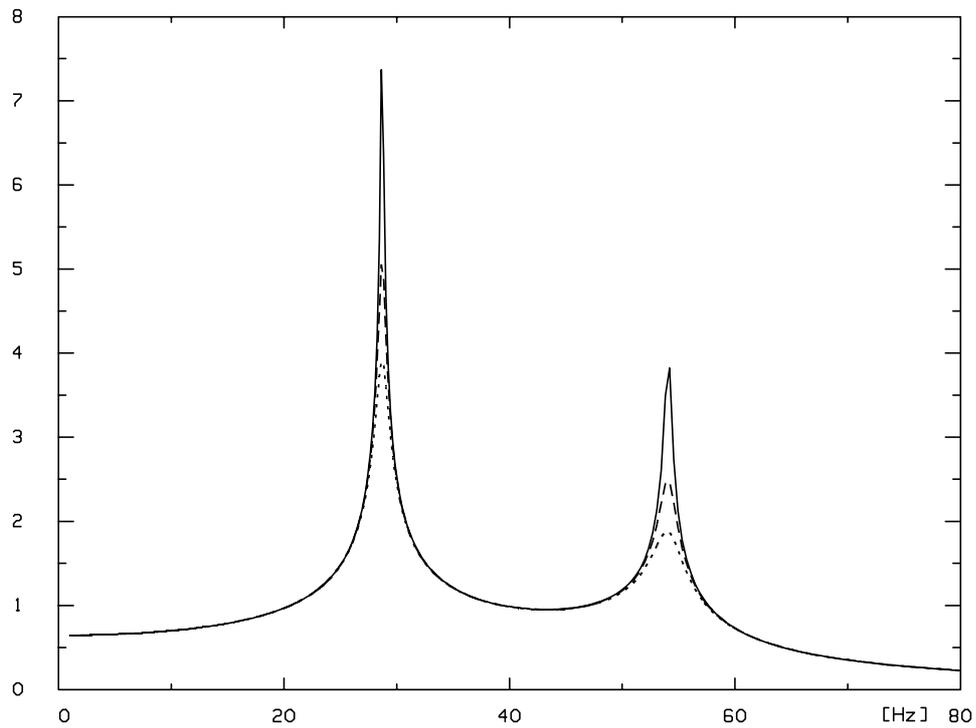


Figure 1.9 : Module de la valeur propre de couplage en fonction de la fréquence, pour trois valeurs d'amortissement des oscillateurs. 1% (—) ; 5% (- - -) ; 10% (.....)

On constate le phénomène classique relatif à l'amortissement qui réduit l'amplitude des pics aux résonances.

1.3.3. Vecteurs propres de couplage

L'expression analytique des vecteurs propres de couplage est directement liée à la valeur de la mobilité des systèmes découplés bloqués. Leur représentation en module et en phase (en fonction de la fréquence) sont visibles sur la Figure 1.10 et sur la Figure 1.11.

On constate que la représentation en module et phase est tout à fait typique d'un mode de résonance, avec le pic en module et le changement de phase de 90° , à la résonance. Cette résonance est à la même fréquence que les résonances des systèmes découplés bloqués (cf. Eq. 1.16).

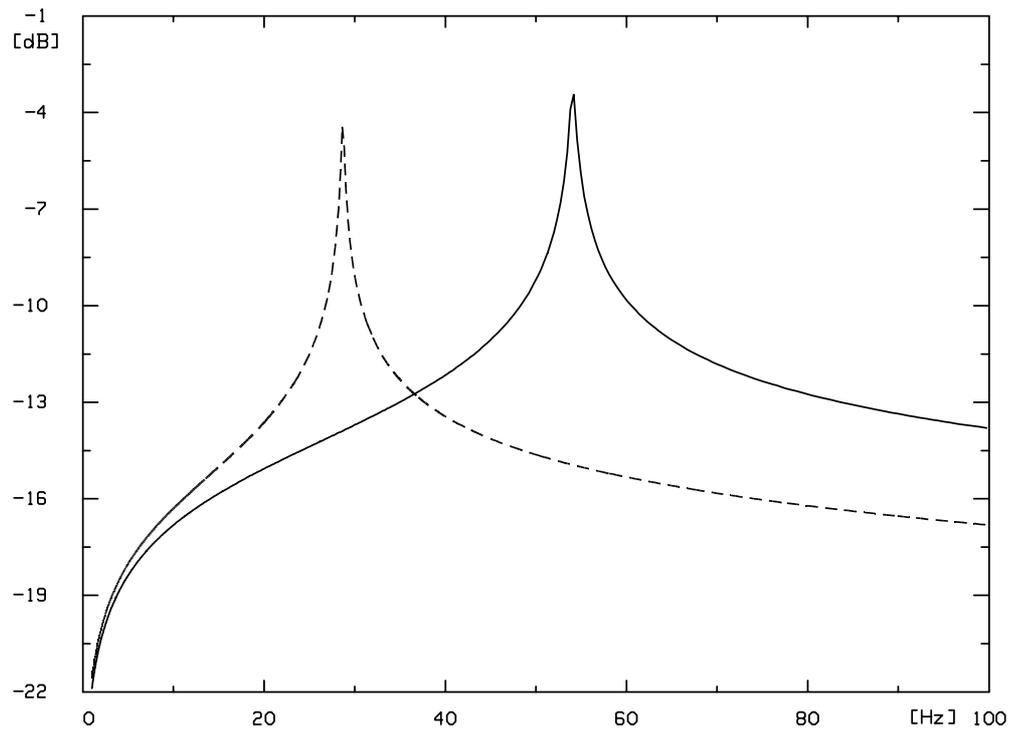


Figure 1.10 : Module des vecteurs propres de couplage en fonction de la fréquence φ_1 (—) et φ_2 (- - -)

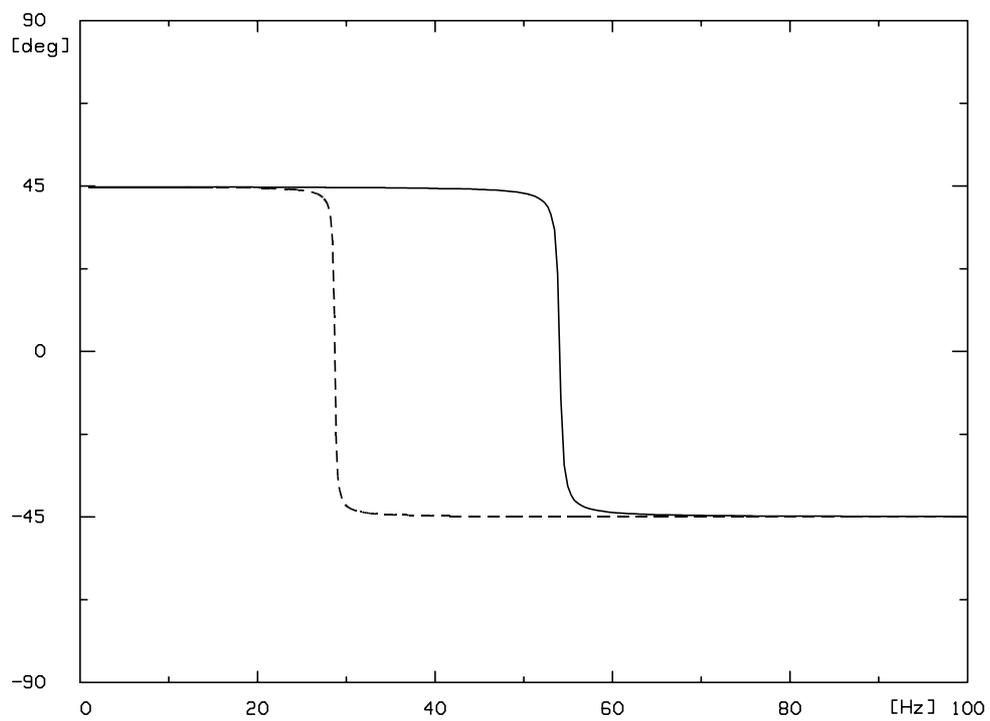


Figure 1.11 : Phase des vecteurs propres de couplage en fonction de la fréquence φ_1 (—) et φ_2 (- - -)

1.4. INTERPRETATION DE LA VALEUR PROPRE DE COUPLAGE

Pour des raisons de simplicité, ce paragraphe prend en compte des systèmes non amortis, c'est-à-dire que les raideurs des ressorts des oscillateurs sont réelles.

1.4.1. Rapport des vitesses

Ce rapport des vitesses s'entend lorsqu'un seul système est excité. En résumant toutes les propriétés énoncées dans les paragraphes précédents, et si l'excitation agit sur le système 1, on écrit le jeu d'équations de vitesse suivantes, avec $w_{o2}=0$:

$$\begin{cases} w_1 = w_{o1} + \lambda \alpha_2 \varphi_1 = \alpha_1 \varphi_1 \\ w_2 = \lambda \alpha_1 \varphi_2 = \alpha_2 \varphi_2 \end{cases}$$

Eq. 1.42

Les facteurs propres s'expriment par :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{\alpha_{o1}}{1-\lambda^2} \\ \alpha_2 = \frac{\lambda \alpha_{o1}}{1-\lambda^2} \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = \lambda \alpha_1$$

Eq. 1.43

Et les vitesses découplées bloquées par :

$$\begin{cases} w_{o1} = \alpha_{o1} \varphi_1 = (1-\lambda^2) \alpha_1 \varphi_1 \\ w_{o2} = \alpha_{o2} \varphi_2 = \frac{(1-\lambda^2)}{\lambda} \alpha_1 \varphi_2 \end{cases}$$

Eq. 1.44

D'après les équations précédentes, quand seul le système 1 est excité, le rapport des vitesses des systèmes couplés s'écrit :

$$\frac{w_2}{w_1} = \lambda \frac{\sqrt{Y_2}}{\sqrt{Y_1}}$$

Eq. 1.45

Soit, après avoir remplacé la valeur propre de couplage par son expression de l'Eq. 1.15 :

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{Y_2}{Y_c}$$

Eq. 1.46

La relation qui relie la vitesse du système excité à celle du système récepteur est de l'ordre du rapport des mobilités du récepteur découplé bloqué et de la liaison.

Un calcul symétrique effectué pour un système 2 excité conduit à une expression de même nature que celle trouvée en Eq. 1.46 :

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{Y_1}{Y_c}$$

Eq. 1.47

L'expression de la valeur propre de couplage donnée en Eq. 1.15 apparaît être la moyenne géométrique des ces deux rapports : la valeur propre de couplage rend compte des transmissions⁵ qui se produisent dans les deux sens⁶.

On définit la mobilité des systèmes libres, c'est-à-dire des oscillateurs simples (masse+ressort). Celles-ci se notent \tilde{Y}_i et s'expriment par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{Y}_1 = \frac{1}{\frac{k_1}{j\omega} + j\omega m_1} \\ \tilde{Y}_2 = \frac{1}{\frac{k_2}{j\omega} + j\omega m_2} \end{array} \right.$$

Eq. 1.48

Les relations entre la mobilité des systèmes libres et celle des systèmes découplés bloqués sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_1 = \frac{\tilde{Y}_1 Y_c}{\tilde{Y}_1 + Y_c} \\ Y_2 = \frac{\tilde{Y}_2 Y_c}{\tilde{Y}_2 + Y_c} \end{array} \right.$$

Eq. 1.49

On reformule l'Eq. 1.46 à partir des expressions de Eq. 1.49 afin d'obtenir des expressions des mobilités séparant bien ce qui est relatif à la raideur du ressort de couplage et à ce qui ne l'est pas :

⁵ Cette notion de moyenne entre deux expériences symétriques (excitation de l'oscillateur 1 d'une part, puis de l'oscillateur 2 d'autre part) se retrouve dans le calcul du coefficient D_{ij} de [Gerretsen 1994]. En effet, celui-ci est obtenu en moyennant deux différences de niveau de vitesse obtenus par deux expériences symétriques.

⁶ Cela montre d'une autre manière que la valeur propre de couplage est représentative d'une caractéristique globale du couplage.

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{\tilde{Y}_2}{\tilde{Y}_2 + Y_c}$$

Eq. 1.50

Si la mobilité du ressort de liaison Y_c devient très petite (un ressort très peu mobile) par rapport à la mobilité de l'oscillateur libre, alors $w_2 = w_1$: les deux oscillateurs vibrent en phase comme s'ils étaient rigidement liés. Au contraire, si Y_c devient très grand (un ressort très mobile) par rapport à la mobilité de l'oscillateur libre, alors $w_2 = 0$; le ressort de couplage est tellement mou qu'il ne parvient pas à transmettre l'excitation fournie par le système 1 et le système 2 ne bouge pas.

1.4.2. Relation entre valeur propre de couplage et force de couplage

L'Eq. 1.24 a permis de conclure que la valeur propre de couplage représente une caractéristique globale du couplage entre les systèmes découplés bloqués. Cet aspect global fait immédiatement penser à la notion de force de couplage. On cherche ainsi à déterminer sous quelle forme la valeur propre de couplage est représentative de la force de couplage.

Lorsque la valeur propre de couplage au carré est égale à l'unité, une relation s'établit entre les mobilités des systèmes libres et la mobilité du ressort de couplage. Pour l'exprimer, on part de l'expression de la valeur propre de couplage donnée en Eq. 1.15 :

$$\lambda^2 = 1 \Rightarrow Y_c^2 = Y_1 Y_2$$

Eq. 1.51

On exprime les mobilités des systèmes découplés bloqués en fonction de celles des systèmes libres :

$$Y_c^2 = \frac{\tilde{Y}_1 Y_c}{\tilde{Y}_1 + Y_c} \frac{\tilde{Y}_2 Y_c}{\tilde{Y}_2 + Y_c}$$

Eq. 1.52

Ce qui mène, après calculs à :

$$Y_c = -(\tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_2)$$

Eq. 1.53

Quand cette équation est vérifiée, alors la valeur propre de couplage au carré est égale à l'unité.

On cherche maintenant les pulsations propres des systèmes couplés, c'est-à-dire les pulsations pour lesquelles les deux systèmes couplés résonnent. Pour cela, on s'appuie sur la formulation de l'Eq. 1.5 dans laquelle on remplace les Y_i et les $k_c/j\omega$ par leurs expressions définies ci-dessus :

$$\begin{bmatrix} \frac{\tilde{Y}_1 + Y_c}{\tilde{Y}_1 Y_c} & -\frac{1}{Y_c} \\ -\frac{1}{Y_c} & \frac{\tilde{Y}_2 + Y_c}{\tilde{Y}_2 Y_c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{o1} \\ F_{o2} \end{Bmatrix}$$

Eq. 1.54

Le déterminant de la matrice d'impédance, quand on l'annule, donne les pulsations propres des systèmes couplés. L'expression du déterminant nul est identique à l'Eq. 1.53 :

$$\frac{\tilde{Y}_1 + Y_c}{\tilde{Y}_1 Y_c} \frac{\tilde{Y}_2 + Y_c}{\tilde{Y}_2 Y_c} - \frac{1}{Y_c^2} = 0 \Rightarrow Y_c = -(\tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_2)$$

Eq. 1.55

Comme la résonance des systèmes couplés indique que la force du couplage est maximale, on peut en conclure que lorsque la valeur propre de couplage au carré est égale à l'unité, alors la transmission par le couplage est maximale.

La Figure 1.12 montre la comparaison du module des vitesses des systèmes couplés avec la valeur propre de couplage au carré, en fonction de la fréquence. On constate que les seules fois où la valeur propre de couplage au carré passe par la valeur unité, il se produit une résonance des systèmes couplés.

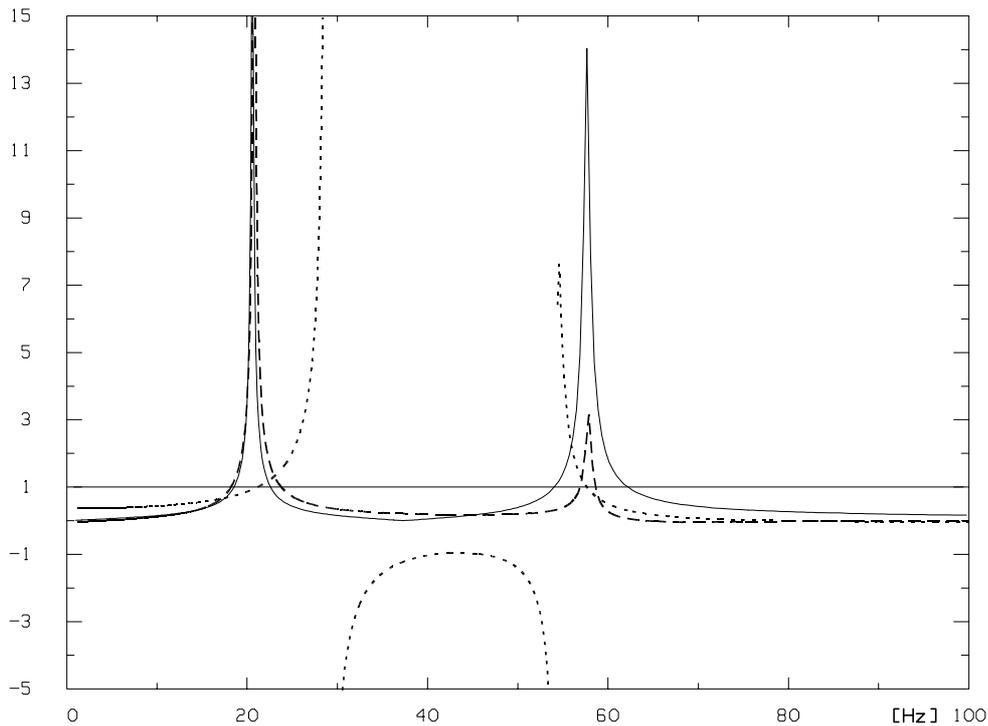


Figure 1.12 : Vitesse des systèmes couplés ($m.s^{-1}$) ; système 1(—), système 2 (- - -) et valeur propre de couplage au carré (.....) en fonction de la fréquence.

1.4.3. Valeur propre de couplage inférieure à un

On se place dans le cas où seul le système 1 est excité. D'après l'Eq. 1.42, la vitesse de l'oscillateur 2 s'écrit :

$$w_2 = \lambda \alpha_1 \varphi_2$$

Eq. 1.56

Remplacer α_1 et φ_2 par leurs expressions permet d'obtenir :

$$w_2 = \lambda \frac{\alpha_{o1}}{1-\lambda^2} \varphi_2 = \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \frac{w_{o1}}{\sqrt{Y_1}} \sqrt{Y_2}$$

Eq. 1.57

L'expression de la vitesse du système 1 découplé bloqué, donnée par l'Eq. 1.9, est introduite dans la relation précédente :

$$w_2 = \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \frac{Y_1 F_{o1}}{\sqrt{Y_1}} \sqrt{Y_2} = \frac{\lambda}{1-\lambda^2} F_{o1} \sqrt{Y_1 Y_2}$$

Eq. 1.58

A partir du terme $\sqrt{Y_1 Y_2}$, on fait apparaître la valeur propre de couplage (cf. Eq. 1.15), ce qui mène à :

$$w_2 = \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} Y_c F_{o1}$$

Eq. 1.59

Sans faire aucune hypothèse, on a établi une relation ne dépendant que de la valeur propre de couplage λ , d'une grandeur intrinsèque au couplage Y_c , et de la force excitatrice F_{o1} . On constate que lorsque la valeur propre de couplage est inférieure à l'unité, alors la vitesse du système récepteur est proportionnelle à λ^2 , c'est-à-dire que plus la valeur propre de couplage est grande, plus la force de couplage est grande.

1.5. APPROCHE ENERGETIQUE

L'énergie vibratoire et les puissances échangées sont largement employées pour décrire les couplages vibroacoustiques. On dénote par exemple les études sur l'emploi de l'équation de diffusion pour décrire l'énergie des systèmes [Djimadoum 1993, Le Bot 1993]. En effet, ces approches offrent des qualités de robustesse et permettent de réduire l'information nécessaire au calcul et les calculs eux-mêmes, l'approche S.E.A. en étant le principal exemple. Il a paru intéressant de prolonger l'analyse précédente par une exploitation énergétique des valeurs propres de couplage.

1.5.1. Puissance échangée

Si seul le système 1 est excité (cas référencé par la lettre "A"), les bilans énergétiques de chaque système sont :

Système 1 :

$$\Pi_{12}^A - \Pi_{2d} = 0$$

Eq. 1.60

Système 2 :

$$\Pi_1 - \Pi_{1d} - \Pi_{12}^A = 0$$

Eq. 1.61

Où Π_1 est la puissance injectée, Π_{12}^A la puissance échangée dans la configuration "A", et Π_{1d} , la puissance dissipée par les pertes du système i (on rappelle que le couplage est non dissipatif, mais que les ressorts des systèmes à un degré de liberté, de raideur complexe, admettent un amortissement hystérétique).

La puissance dissipée dans les pertes du système 2 se calcule par :

$$\Pi_{2d} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \left\langle w_2 \left| \frac{1}{Y_2} w_2 \right. \right\rangle \right\}$$

Eq. 1.62

A partir des expressions de l'Eq. 1.42, l'équation précédente s'écrit sous cette nouvelle forme :

$$\Pi_{2d} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \left\langle \alpha_2 \varphi_2 \left| \frac{1}{Y_2} \alpha_2 \varphi_2 \right. \right\rangle \right\} = \frac{1}{2} |\alpha_2|^2 \operatorname{Re} \left\{ \left\langle \varphi_2 \left| \frac{1}{Y_2} \varphi_2 \right. \right\rangle \right\} = \frac{1}{2} |\alpha_2|^2 T_{C2}$$

Eq. 1.63

La quantité T_{Ci} se définissant par :

$$T_{Ci} = \operatorname{Re} \left\{ \left\langle \varphi_i \left| \frac{1}{Y_i} \varphi_i \right. \right\rangle \right\}$$

Eq. 1.64

T_{Ci} est un indice de réceptivité. Il indique si de la puissance peut être injectée au système, c'est-à-dire si, aux environs de la fréquence considérée, il existe un mode de vibration. L'expression développée de l'indice de réceptivité est :

$$T_{Ci} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\sqrt{Y_i^*}}{\sqrt{Y_i}} \right\} = \frac{\operatorname{Re} \left\{ \sqrt{Y_i^*} \right\}}{|Y_i|} = \cos(\operatorname{Arg}\{Y_i\})$$

Eq. 1.65

C'est une quantité intrinsèque à chaque système, qui ne dépend pas de l'excitation. Le domaine de validité de cet indice de réceptivité est [0..1]. Lorsqu'il approche l'unité, il est très réceptif, et donc la puissance sera facilement injectée. Au contraire, lorsqu'il tend vers zéro, aucune puissance n'est injectable parce qu'il n'y a aucun mode de vibration assez proche apte à réagir avec l'excitation.

La Figure 1.13 montre l'indice de réceptivité en fonction de la fréquence pour chaque système. On constate qu'il présente un pic à la même fréquence que chaque vecteur propre de couplage associé (c'est-à-dire à la résonance du système découplé bloqué).

On introduit une quantité intermédiaire se définissant par :

$$\Theta_i = \frac{1}{2} |\alpha_i|^2 T_{Ci}$$

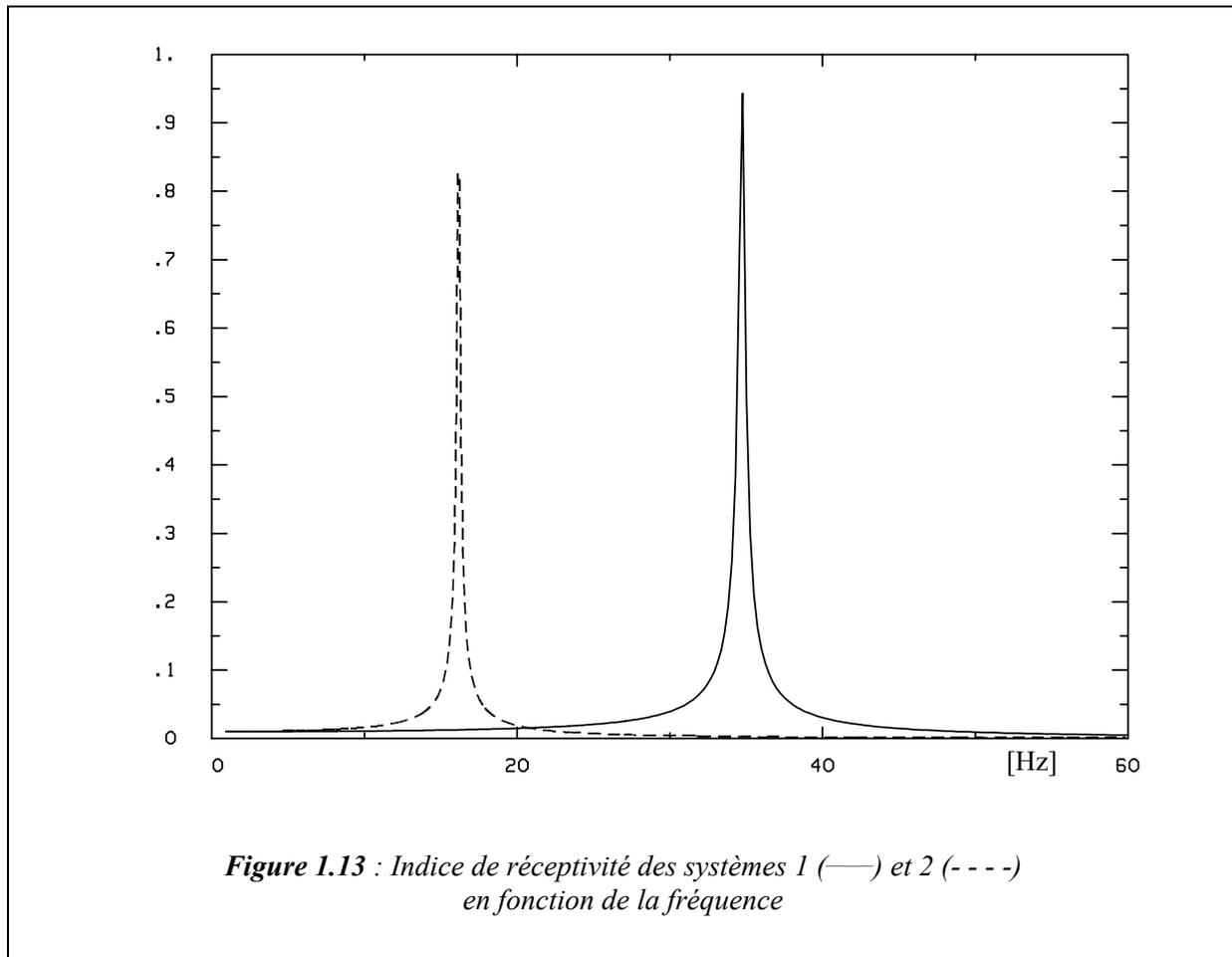
Eq. 1.66

La puissance échangée entre les deux systèmes peut s'écrire, à partir de l'expression de l'Eq. 1.43 :

$$\Pi_{12}^A = \Theta_2 = \frac{1}{2} |\lambda^2| \frac{T_{C2}}{T_{C1}} \Theta_1$$

Eq. 1.67

L'Eq. 1.67 fait apparaître le rapport des indices de réceptivité. Ce rapport donne une indication sur la capacité qu'ont les systèmes à échanger de la puissance par le couplage.



Autre terme des bilans énergétiques à étudier, la puissance dissipée dans le système 1. Elle se calcule par :

$$\Pi_{1d} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \langle w_1 \left| \frac{1}{Y_1} w_1 \right. \rangle \right\}$$

Eq. 1.68

Le simple remplacement des termes de la vitesse en fonction des vecteurs propres conduit à l'expression simple :

$$\begin{aligned} \Pi_{1d} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \langle \alpha_1 \varphi_1 \left| \frac{1}{Y_1} \alpha_1 \varphi_1 \right. \rangle \right\} = \frac{1}{2} |\alpha_1|^2 T_{C1} \\ &= \Theta_1 \end{aligned}$$

Eq. 1.69

Ainsi, l'Eq. 1.67 et l'Eq. 1.69 permettent d'écrire une relation entre la puissance dissipée dans le système 1 excité, et la puissance échangée par la liaison :

$$\Pi_{12}^A = \frac{1}{2} |\lambda^2| \frac{T_{C2}}{T_{C1}} \Pi_{1d}$$

Eq. 1.70

Le rapport des indices de réceptivité est représenté sur la Figure 1.14. Il montre, par rapport à l'Eq. 1.70, que ce rapport passe par un maximum lorsque la fréquence courante correspond à la fréquence de résonance du système découplé bloqué récepteur et par un minimum quand c'est le système excité.

En dessous du premier mode de résonance, les deux indices sont égaux (le rapport est à 0 dB). On peut dire alors que la compatibilité de couplage est maximum. La conséquence est que dans cette zone de fréquence, la valeur propre de couplage, $|\lambda^2|$, donne directement le rapport entre la puissance échangée entre les deux systèmes (système 1 excité) et la puissance dissipée dans le système 1.

L'Eq. 1.70 montre que la valeur propre de couplage fait partie du rapport entre puissance échangée et puissance dissipée. Aussi, on observe sur la Figure 1.15 le comportement des quantités $|\lambda^2| \frac{T_{C1}}{T_{C2}}$ et $|\lambda^2| \frac{T_{C2}}{T_{C1}}$ en fonction de la fréquence. Il apparaît que le module de ces quantités présente un unique pic à la fréquence de résonance du système découplé bloqué récepteur. Ainsi, un maximum de puissance passe par la liaison quand le système récepteur est sur sa fréquence de résonance (en configuration découplée bloquée). Ceci est à mettre en relation avec le vecteur propre de couplage qui présente la même fréquence de résonance ; le vecteur propre indique le chemin de transmission, c'est-à-dire par quel mode la puissance échangée va être transmise au système récepteur.

On suppose maintenant que le système excité est le système 2. Ce cas est référencé par la lettre "B". La relation entre la puissance dissipée dans 2 et la puissance échangée par la liaison est :

$$\Pi_{12}^B = \frac{1}{2} |\lambda^2| \frac{T_{C1}}{T_{C2}} \Pi_{2d}$$

Eq. 1.71

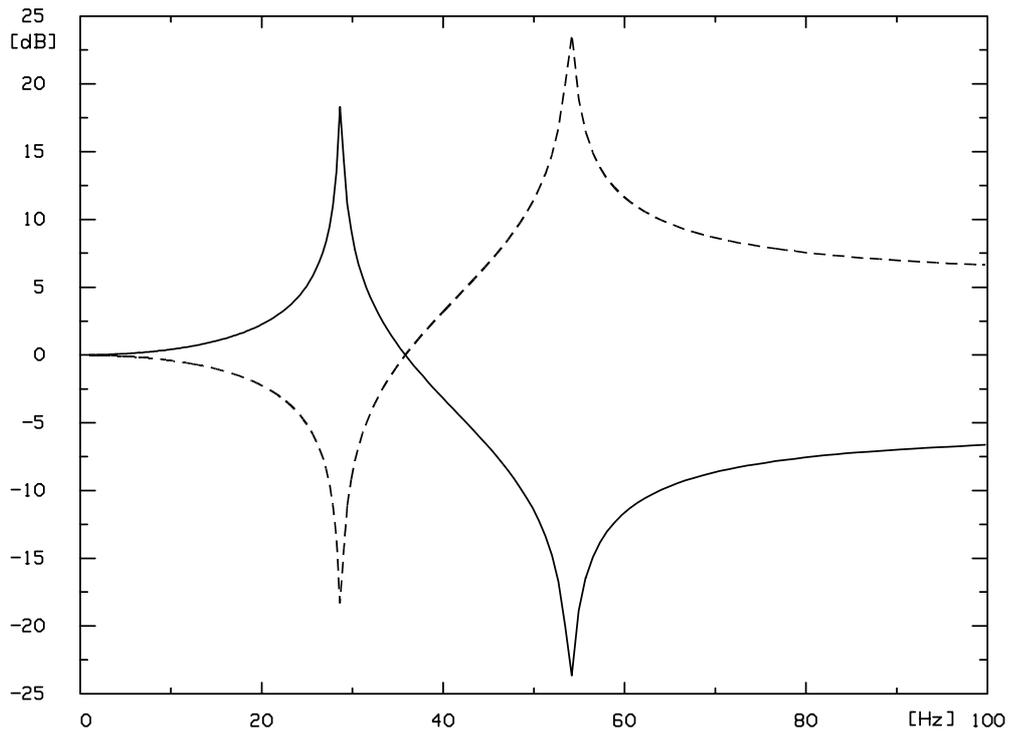


Figure 1.14 : Rapport des indices de réceptivité des systèmes en fonction de la fréquence T_{C2}/T_{C1} (—) et T_{C1}/T_{C2} (----)

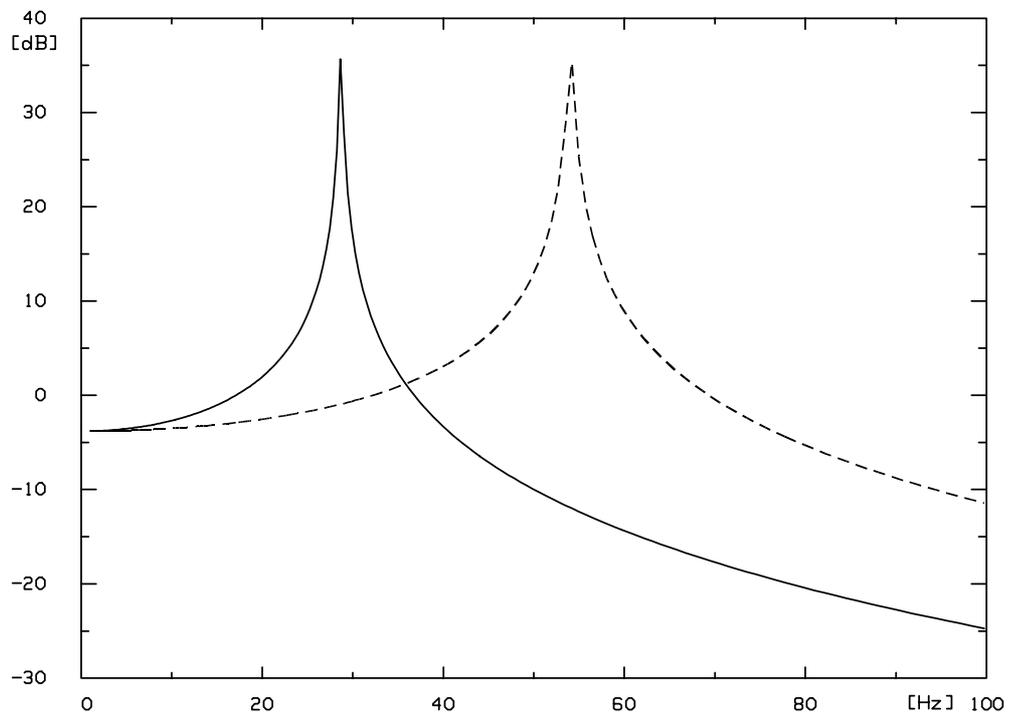


Figure 1.15 : Rapport des indices de réceptivité en fonction de la fréquence

$$|\lambda^2| \frac{T_{C2}}{T_{C1}} \text{ (—) et } |\lambda^2| \frac{T_{C1}}{T_{C2}} \text{ (----)}$$

Pour des excitations aléatoires et décorréées, la puissance échangée entre les deux systèmes, moyennée sur la fréquence, est la différence des puissances échangées pour chaque expérience A et B :

$$\langle \Pi_{12} \rangle = \langle \Pi_{12}^A - \Pi_{12}^B \rangle = \frac{1}{2} \langle |\lambda^2| \rangle \left(\langle \frac{T_{C2}}{T_{C1}} \rangle \langle \Pi_{1d} \rangle - \langle \frac{T_{C1}}{T_{C2}} \rangle \langle \Pi_{2d} \rangle \right)$$

Eq. 1.72

La puissance échangée entre les deux systèmes à un degré de liberté est proportionnelle au module de la valeur propre de couplage au carré quand le système 1 est excité. Cela confirme que la valeur propre de couplage est représentative de la force du couplage, comme il l'avait été conclu après l'Eq. 1.24.

L'Eq. 1.69 montre que la quantité Θ_1 est égale à la puissance dissipée dans le système 1. Cela signifie que Θ_1 représente la puissance dissipée du système couplé, alors que jusqu'à maintenant, les grandeurs étaient toutes rapportées aux systèmes découplés bloqués. La puissance dissipée, et donc Θ_1 , sont proportionnels à l'énergie du système 1, E_1 , où η_1 est le facteur de perte du système 1 :

$$\Pi_{1d} = \eta_1 \omega E_1 = \Theta_1$$

Eq. 1.73

1.5.2. Puissance injectée

On se replace dans le cas où seul le système 1 est excité. On s'intéresse aux termes qui composent le bilan énergétique du système 1, en étudiant la puissance injectée dans le système 1, Π_1 :

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \langle w_1 | F_1 \rangle \right\}$$

Eq. 1.74

La force qui s'applique sur le système 1 s'exprime en fonction de la vitesse du système découplé bloqué et de sa mobilité selon l'Eq. 1.9, et aussi en fonction de l'Eq. 1.43. On cherche à faire apparaître la puissance injectée au système 1 découplé bloqué, Π_{o1} , quantité qui présente un sens physique évident :

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \Pi_{o1} + \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \langle \lambda \alpha_2 \phi_1 \left| \frac{1}{Y_1} w_{o1} \right. \rangle \right\} = \Pi_{o1} + \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \langle \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} \alpha_{o1} \phi_1 \left| \frac{1}{Y_1} \alpha_{o1} \phi_1 \right. \rangle \right\} \\ &= \Pi_{o1} + \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{\lambda^{*2}}{1-\lambda^{*2}} \right\} |\alpha_{o1}|^2 T_{C1} = \Pi_{o1} + \text{Re} \left\{ \frac{\lambda^{*2}}{1-\lambda^{*2}} \right\} \Theta_{o1} \end{aligned}$$

Eq. 1.75

La grandeur Θ_{o1} est en fait identique à la puissance injectée dans le système 1 découplé bloqué, Π_{o1} . En effet, en accord avec l'Eq. 1.44 et selon l'Eq. 1.66, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\Pi_{o1} &= \operatorname{Re}\left\{\langle w_{o1}|F_1 \rangle\right\} = \operatorname{Re}\left\{\langle \alpha_{o1}\varphi_1 \left| \frac{1}{Y_1} \alpha_{o1}\varphi_1 \right. \rangle\right\} \\ &= |\alpha_{o1}|^2 T_{C1} = \Theta_{o1}\end{aligned}$$

Eq. 1.76

Si l'on exprime la puissance injectée dans le système 1 uniquement en fonction de la quantité Π_{o1} :

$$\Pi_1 = \Pi_{o1} \left(1 + \operatorname{Re} \left\{ \frac{\lambda^{*2}}{1 - \lambda^{*2}} \right\} \right)$$

Eq. 1.77

Cette expression montre le résultat classique [Lyon 1962] déjà énoncé pour l'Eq. 1.12, à savoir que si le couplage est faible ($\lambda \ll 1$), alors la partie réelle du terme de droite devient négligeable par rapport à un, et la puissance introduite dans le système couplé est à peu près celle introduite dans le système découplé bloqué.

1.6. CONCLUSION

Ce chapitre a exposé les grandes lignes de la méthode de résolution qui sera plus largement développée tout au long de ce rapport. L'utilisation d'un modèle simple constitué de deux systèmes à un degré de liberté couplés, a permis de se concentrer uniquement sur la physique du problème, sans être gêné par le formalisme. Il est évident qu'une telle simplicité peut occulter certains des problèmes rencontrés dans le cas de systèmes vibrants multimodaux, mais l'essentiel des résultats est là.

La méthode traditionnelle de résolution est rappelée ; elle fournit la vitesse des systèmes couplés, connaissant les caractéristiques des oscillateurs, de l'élément couplant et des forces appliquées. En partant du même formalisme, et après un dimensionnement du problème en vitesse, on définit la matrice de couplage qui est à la base de la méthode développée dans ce document. C'est une matrice adimensionnelle qui ne comporte que des termes reliant la vitesse d'un système à la vitesse de l'autre système. L'étude du couplage ne peut se passer d'une telle variable, intrinsèque aux systèmes et indépendante de l'excitation.

La matrice de couplage constitue le point de départ de l'investigation. La recherche des quantités propres mène à une paire de valeurs propres dites "de couplage" de signe opposé, et à une paire de vecteurs propres de couplage. Les valeurs propres sont proportionnelles au produit du rapport des mobilités des systèmes et du ressort de couplage.

On montre ensuite que les vecteurs propres peuvent être utilisés pour reconstruire la vitesse des systèmes couplés. Ainsi, celle-ci est montrée être égale à la vitesse des systèmes découplés bloqués plus des termes ne dépendant que des quantités propres de couplage. On en déduit que la valeur propre de couplage est une grandeur globale (moyenne géométrique des rapports des mobilités des oscillateurs sur celle du ressort de couplage) qui est reliée à la force du couplage. Un résultat fondamental est que le couplage est maximum quand la valeur propre de couplage vaut un. Quant au vecteur propre de couplage, il indique le chemin par lequel le couplage est transmis d'un système à l'autre. En l'occurrence, il s'agit des modes de résonance des systèmes découplés bloqués.

On constate de plus que la vitesse des systèmes couplés et la vitesse des systèmes découplés bloqués sont reliées par des termes ne dépendant que des quantités propres de couplage et donc ne dépendant pas de l'excitation.

L'étude numérique montre que la valeur propre de couplage présente des résonances aux mêmes fréquences que celles des systèmes découplés bloqués. L'augmentation de l'amortissement des oscillateurs lisse ses pics de résonances et le vecteur propre de couplage présente la forme classique d'une résonance d'un système découplé bloqué.

Enfin, l'approche énergétique démontre que la valeur propre de couplage est proportionnelle à l'énergie échangée entre les systèmes. Par ailleurs, l'échange d'énergie entre deux systèmes dépend de la réceptivité du système non-excité. Celui-ci sera d'autant plus réceptif au couplage qu'il sera proche de sa fréquence de résonance en configuration découplée bloquée, rejoignant en cela le fait que le vecteur propre de couplage représente le chemin de transmission du couplage. En outre, la valeur propre de couplage montre que lorsqu'elle est faible, la réponse d'un système, lorsqu'il est couplé est identique à sa réponse découplée bloquée : c'est la conséquence du couplage faible.

Les deux chapitres suivants vont utiliser la même démarche basée sur les quantités propres de couplage pour traiter le cas plus réaliste de deux systèmes multimodaux couplés par un ressort. Le chapitre 2 s'attachera à décrire la physique du modèle choisi ainsi que donner des résultats plus généraux sur la matrice de couplage et les quantités propres de couplage tandis que le chapitre 3 décrira la méthode de résolution basée sur les valeurs propres de couplage pour le modèle multimodal étudié.

* * *

*

CHAPITRE 2

Le formalisme et la formulation

CHAPITRE 2 - SOMMAIRE

2.1. DESCRIPTION DES SYSTEMES

- 2.1.1. Approche modale - Généralités
- 2.1.2. Vibration en flexion de la plaque mince
- 2.1.3. Caractérisation de la liaison mécanique
- 2.1.4. Transmission des efforts
- 2.1.5. Résolution classique de référence

2.2. NOTION DE SYSTEME “DECOUPLE BLOQUE”

2.3. MATRICE DE COUPLAGE

- 2.3.1. Construction de la matrice de couplage
- 2.3.2. Propriétés de la matrice de couplage
 - 2.3.2.1. Paires de valeurs propres de couplage
 - 2.3.2.2. Groupement des vecteurs propres
 - 2.3.2.3. Permutation des coefficients des vecteurs propres

2.4. RESOLUTION ITERATIVE D’UN PROBLEME COUPLE

2.5. CONCLUSION

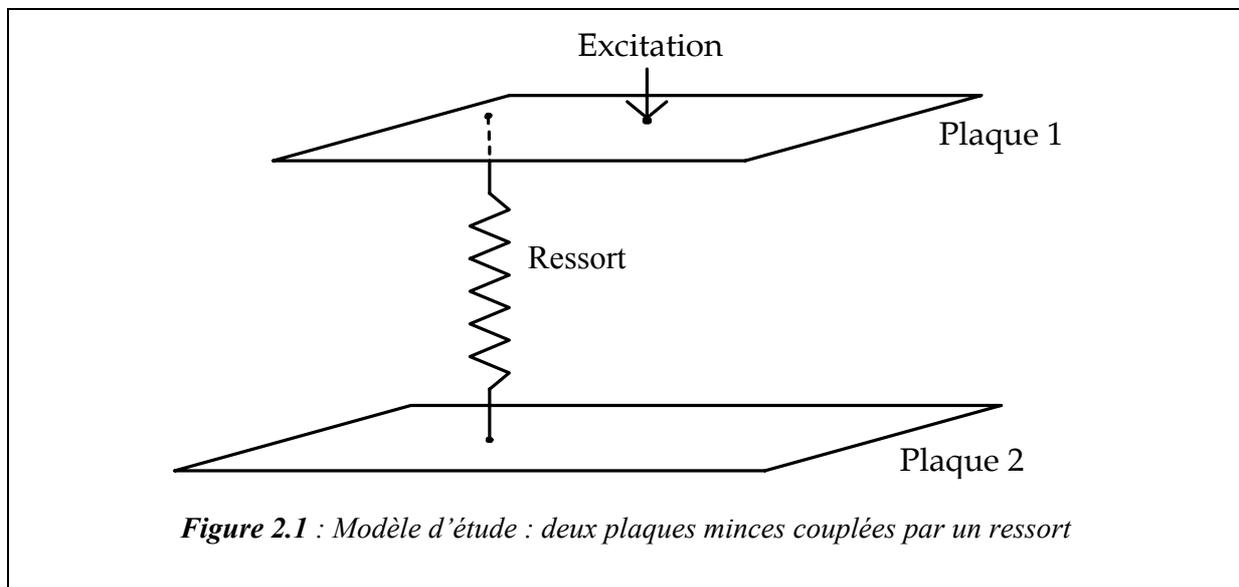
2. Le formalisme et la formulation

Ce chapitre va établir les bases techniques nécessaires à l'extension de la méthode des quantités propres de couplage décrite dans le premier chapitre. En effet, celle-ci sera appliquée au chapitre 3 à un modèle multimodal sensiblement plus complexe que les deux oscillateurs à un degré de liberté (cf. Chapitre 1) : deux plaques couplées.

Quatre grands sujets composent ce chapitre. Premier sujet, le modèle choisi pour étudier les phénomènes mis en jeu par le couplage. Celui-ci, constitué de deux plaques, sera abordé sous l'angle de l'approche modale. Chacune des plaques sera décrite d'abord mécaniquement puis selon la technique modale. Ensuite, le deuxième sujet traitera de la configuration découplée bloquée ; le chapitre 1 a déjà abordé cette configuration. Ses conséquences sur les bases modales des plaques seront étudiées, sur le plan à la fois mathématique et physique. Le troisième axe s'intéressera à la matrice de couplage qui est à la base de la méthode puisque ce sont ses valeurs propres et ses vecteurs propres qui servent à caractériser le couplage. La forme de la matrice de couplage entraîne certaines propriétés générales qui seront démontrées. Enfin, dernier sujet directement lié à la matrice de couplage, la résolution du problème couplé par une méthode itérative. Chronologiquement, c'est cette méthode qui a fait que l'on s'est intéressé aux phénomènes du couplage par le biais de la matrice de couplage. On exposera rapidement cette méthode de résolution en s'attachant à mettre en valeur les propriétés qui seront utilisées dans le cadre de la résolution par la méthode utilisant les quantités propres de couplage.

2.1. DESCRIPTION DES SYSTEMES

Le chapitre précédent a traité des systèmes à un degré de liberté. Dans le cadre de cette thèse sur le couplage, on ne pouvait raisonnablement pas espérer étudier toutes les facettes et tous les mécanismes mis en jeu par le couplage dans un modèle d'étude aussi simpliste. C'est pourquoi l'on a cherché une paire de systèmes vibrants simples possédant une infinité de degrés de liberté. Il a d'abord été envisagé de choisir la poutre. Elle est très souvent utilisée dans la littérature [Sharton 1968, Remington 1975, Crandall 1971] pour sa simplicité, mais sa densité modale faible et décroissante en fréquence est assez peu représentative des systèmes vibrants généralement rencontrés dans la pratique. C'est pourquoi le choix final s'est porté sur la plaque mince, certes plus complexe, mais qui donne un caractère plus général aux applications. Toujours pour des raisons de simplicité, ces plaques sont supposées ne vibrer qu'en flexion. En ce qui concerne la liaison, il apparaît vite que la plus simple de toutes est le ressort. Celui-ci, placé perpendiculairement aux plaques, ne transmet que les efforts créés par le mouvement transversal des plaques. Enfin l'excitation est de type ponctuelle, harmonique. Elle s'applique dans la même direction que le ressort, c'est-à-dire perpendiculairement aux plaques. La Figure 2.1 montre ce modèle :



Les plaques sont des systèmes multimodaux que l'on abordera par une approche modale. Les principes de résolution seront rappelés dans un premier paragraphe, avant de caractériser les éléments composants le modèle : la plaque mince et le ressort de liaison. Enfin, on étudiera comment se transmettent les efforts entre les plaques, par l'intermédiaire du ressort.

2.1.1. Approche modale - Généralités

L'approche modale est une approche classique des problèmes vibratoires. Tout système fermé possède un ensemble de modes de vibrations correspondant à ses dimensions spécifiques, ses composantes structurelles et ses conditions aux limites. L'ensemble de ces modes n'est pas toujours facile à déterminer de manière analytique. Dans certains cas extrêmement simples correspondant à des géométries basiques (plaque rectangulaire, volume parallélépipédique), il est connu analytiquement mais lorsque le système se complique, on doit avoir recours à l'expérience, ou à une modélisation numérique (méthode des éléments finis) [Levy 1976, Nefske 1982] malheureusement limitée aux basses fréquences pour des raisons pratiques. L'approche modale consiste à prendre l'ensemble de ces modes de résonance comme base fonctionnelle pour les solutions du problème.

Le vecteur solution considéré au point M admet un développement unique sur la base ainsi définie :

$$w(M, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i(\omega) \psi_i(M)$$

Eq. 2.1

$w_i(\omega)$ est la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur des amplitudes modales et $\psi_i(M)$ est la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur des modes propres considérés au point M. Cette expression signifie que la vitesse résultante $w(M, \omega)$ s'obtient par la somme des composantes du mode propre $\psi_i(M)$ du système au point M, pondérées par des coefficients d'amplitude modale dépendant de la fréquence $w_i(\omega)$.

Si l'on considère que l'ensemble des amplitudes de chaque mode de la base modale (ψ), considérées au point M définit un vecteur $\vec{\psi}(M)$, alors l'Eq. 2.1 peut se noter sous forme vectorielle :

$$w(M, \omega) = \vec{\psi}(M)^t \vec{w}(\omega)$$

Eq. 2.2

Dans le chapitre 3, les définitions des expressions des matrices se feront sous les deux notations. En effet, si la notation vectorielle est très efficace (son application à la programmation vectorielle est directe), elle n'est pas toujours des plus explicites.

2.1.2. Vibration en flexion de la plaque mince

Le modèle étudié est constitué de deux plaques minces rectangulaires couplées par un ou plusieurs ressorts. L'étude de la plaque mince va d'abord consister en l'obtention de l'équation d'équilibre dynamique qui autorise ensuite une approche modale.

Une plaque mince rectangulaire est définie comme ayant une dimension, l'épaisseur h , très petite devant les deux autres, longueur L_x et largeur L_y et devant la longueur d'onde. Soit w sa vitesse en flexion pure. Ce terme de vitesse dépend des deux coordonnées x et y sur la plaque et du temps t . Soit m' la masse par unité de surface de cette plaque, D sa rigidité structurale et P_z le chargement extérieur.

Sans remonter trop loin dans la théorie de la Mécanique des Milieux Continus, et sans rentrer dans les détails des champs de déplacements et de contraintes, la loi de Hooke et les équations de Lamé-Navier permettent d'écrire les moments¹ dans le plan de la plaque, M_{xx} , M_{yy} , M_{xy} , (dérivés par rapport au temps pour travailler en dimension de vitesse), en fonction de la vitesse de déplacement w dans la direction z :

$$M_{xx} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \text{Eq. 2.3}$$

$$M_{yy} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad \text{Eq. 2.4}$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \text{Eq. 2.5}$$

Où ν est le coefficient de Poisson. Le coefficient de rigidité en flexion de la plaque mince, D , est défini par :

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} \quad \text{Eq. 2.6}$$

L'effort tranchant dans la direction x s'obtient par dérivation des moments :

$$Q_x = \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad \text{Eq. 2.7}$$

De la même manière dans la direction y :

¹ Une des références de base sur ce sujet pourrait être [TIMOSHENKO, S. - *Theory of plates and shells*. New York : McGraw-Hill Book Company, 1940, 492 p.]. Les autres références en découlent, c'est-à-dire [Cremer 1966, Gagliardini 1991a, Mathey 1963, Roseau 1984].

$$Q_y = \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$

Eq. 2.8

L'équation d'équilibre dynamique local de la plaque découplée libre s'écrit :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = m' \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Eq. 2.9

Le remplacement des expressions des efforts tranchants et des moments, de manière à exprimer l'Eq. 2.9 en termes de vitesse, et l'ajout de la charge extérieure P_z , permettent d'obtenir l'équation classique :

$$\frac{\partial P_z}{\partial t} = m' \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \nabla^4 w$$

Eq. 2.10

Cette équation représente l'équilibre local d'une plaque et permet de relier le terme de chargement de la plaque, qui peut être de n'importe quel type, ponctuel ou réparti, statique ou dynamique, à son déplacement en flexion, c'est-à-dire selon l'axe z .

Pour un chargement harmonique de pulsation ω , la dérivée temporelle disparaît et l'Eq. 2.10 devient :

$$j\omega P_z = -\omega^2 m' w + D \nabla^4 w$$

Eq. 2.11

Les conditions aux limites de la plaque rectangulaire simplement appuyée sur son pourtour sont :

- vitesse de la plaque selon z , nulle,
- moment normal sur appui, nul.

Elles se traduisent par le jeu d'équations suivant :

$$w = 0 \quad \text{sur le périmètre de (S)}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{pour } x = 0, L_x \quad ; \quad 0 < y \leq L_y$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pour } x = 0, L_y \quad ; \quad 0 < x \leq L_x$$

Eq. 2.12

Où (S) est le domaine d'étude, c'est-à-dire la surface de la plaque. La famille de fonctions (ϕ) qui satisfont aux conditions aux limites dans ce cas est constituée des fonctions sinus :

$$\phi_{mn}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)$$

Eq. 2.13

Les paramètres m et n décrivent l'ensemble des entiers positifs. Cette famille de fonctions satisfait aux conditions d'orthogonalité. Une norme N_{mn} lui est associée :

$$\int_{(S)} \phi_{mn} \cdot \phi_{kl} dS = \begin{cases} 0 & \text{sim, } n \neq k, l \\ N_{mn} & \text{sim, } n = k, l \end{cases}$$

Eq. 2.14

La norme N_{mn} associée au mode (m, n) vaut :

$$N_{mn} = \frac{L_x L_y}{4}$$

Eq. 2.15

Les pulsations propres correspondantes, $\omega'_{m,n}$, s'expriment sous la forme :

$$\omega'_{mn}(x, y) = \frac{D}{m'} \left[\left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^4 + \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^4 \right]$$

Eq. 2.16

La vitesse en flexion de la plaque s'écrit sur la base orthogonale (ϕ) de la même manière qu'indiqué en Eq. 2.1, les coefficients d'amplitude modale ne notant ici a_{mn} :

$$w(x, y, \omega) = \sum_m \sum_n a_{mn}(\omega) \phi_{mn}(x, y)$$

Eq. 2.17

L'équation différentielle d'équilibre (Eq. 2.11) se résout en utilisant la seconde formule de Green appliquée au problème des plaques, et dont la forme a été donnée par Belinski et Kouzov [Belinski 1981]. On prend, comme fonction auxiliaire dans la formule de Green, une fonction ϕ_{mn} . Cette fonction vérifie les conditions aux limites d'appui simple et donc les termes de bord de la formule de Green disparaissent :

$$\int_{(S)} (\phi_{mn} j \omega P_Z) dS = \int_{(S)} w \left[-\omega^2 m' \phi_{mn} + D \left(\frac{\partial^4 \phi_{mn}}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \phi_{mn}}{\partial y^4} \right) \right] dS$$

Eq. 2.18

Il est possible d'exprimer la pression excitatrice dans la base modale (ϕ) comme il l'a été fait pour la vitesse précédemment. Les coefficients d'amplitude modale se notant b_{mn} , la pression a une expression de la forme :

$$p_Z(x, y, \omega) = \sum_m \sum_n b_{mn}(\omega) \phi_{mn}(x, y)$$

Eq. 2.19

Les expressions de la vitesse et de la pression ainsi définies, incluses dans l'Eq. 2.18, conduisent à :

$$j\omega b_{mn} N_{mn} = \left[-\omega^2 m' + D \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^4 + D \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^4 \right] a_{mn} N_{mn}$$

Eq. 2.20

En introduisant la pulsation propre ω'_{mn} dont l'expression est donnée par l'Eq. 2.16, l'Eq. 2.20 se réduit à :

$$b_{mn} = j\omega m' \left[1 - \frac{\omega'^2_{mn}}{\omega^2} \right] a_{mn}$$

Eq. 2.21

On déduit de l'Eq. 2.21, l'expression de l'impédance de la plaque homogène simplement appuyée qui relie le vecteur des amplitudes modales de la vitesse de la plaque à celui de la pression qui s'y exerce. L'impédance modale, définie comme le rapport entre les amplitudes modales de la pression modale et de la vitesse, se note :

$$Z'_{mn,kl} = j\omega m' \left[1 - \frac{\omega'^2_{mn}}{\omega^2} \right] \delta_{mk} \delta_{nl}$$

Eq. 2.22

δ_{ij} , le symbole de Kronecker, a le comportement suivant : $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

Les impédances modales peuvent aussi être écrites sous forme matricielle :

$$\vec{P}_Z = \overline{\overline{Z'}} \vec{w}$$

Eq. 2.23

Comme le montre bien l'Eq. 2.22, la matrice $\overline{\overline{Z'}}$ est diagonale, ce qui signifie que ω'_{mn} représente bien les pulsations de la base modale (ϕ) de la plaque découplée libre.

2.1.3. Caractérisation de la liaison mécanique

Les liaisons sont supposées être ponctuelles. Leur raideur s'exprime par k .

Les efforts appliqués par le ressort de liaison sur les plaques 1 et 2 s'expriment classiquement par :

$$\begin{cases} F_{Q_1} = \frac{k}{j\omega}(w_1 - w_2) \\ F_{Q_2} = \frac{k}{j\omega}(w_2 - w_1) \end{cases}$$

Eq. 2.24

Ces forces s'exercent ponctuellement sur les plaques, produisant des efforts localisés aux points de contact Q entre le ressort et la plaque. La charge extérieure, P_Q , appliquée à la plaque isolée représente l'action de la liaison :

$$P_Q = \delta(x - x_F)\delta(y - y_F)F_Q$$

Eq. 2.25

Il décrit la charge extérieure appliquée à la plaque par la liaison dans une démarche identique à celle utilisée dans le § 2.1.2.

$$-j\omega P_Q = -\omega^2 m'w + D\nabla^4 w$$

Eq. 2.26

Le signe négatif du chargement issu de la liaison vient du fait que cette force s'oppose au mouvement en flexion de la plaque. La formule de Green s'applique à l'Eq. 2.26 comme décrit précédemment et si l'on fait apparaître l'expression de l'impédance modale $Z'_{mn,mn}$, il vient :

$$Z'_{mn,mn} N_{mn} a_{mn} = - \int_{(S)} P_Q \phi_{mn} dS$$

Eq. 2.27

L'Eq. 2.25 permet de remplacer la quantité P_Q :

$$Z'_{mn,mn} N_{mn} a_{mn} = - \int_{(S)} (\delta(x - x_F)\delta(y - y_F)F_Q) \phi_{mn} dS$$

Eq. 2.28

Cette expression est évidemment valable aussi bien pour la plaque 1 que pour la plaque 2. Comme le module de la force F_Q est indépendant des coordonnées de son point d'application, l'Eq. 2.28 peut se mettre sous la forme suivante pour chaque plaque :

$$Z'_{1mn,mn} N_{mn} a_{1mn} = - [F_{Q_1} \phi_{mn}(x_{F_{Q_1}}, y_{F_{Q_1}})]$$

Eq. 2.29

$$Z'_{2mn,mn} N_{mn} a_{2mn} = - [F_{Q_2} \phi_{mn}(x_{F_{Q_2}}, y_{F_{Q_2}})]$$

Eq. 2.30

2.1.4. Efforts de couplage

Les termes $w_1(Q_1)$ et $w_2(Q_2)$ désignent la résultante de la vitesse des plaques 1 et 2 aux points de liaison (x_{FQ_1}, y_{FQ_1}) et (x_{FQ_2}, y_{FQ_2}) que l'on note de manière abrégée (Q_1) et (Q_2) :

$$Z'_{1mn, mn} N_{mn} a_{1mn} = -\frac{k}{j\omega} [(w_1 - w_2) \phi_{mn}(Q_1)]$$

Eq. 2.31

$$Z'_{2mn, mn} N_{mn} a_{2mn} = -\frac{k}{j\omega} [(w_2 - w_1) \phi_{mn}(Q_2)]$$

Eq. 2.32

Les vitesses des plaques au point de couplage, $w_1(Q_1)$ et $w_2(Q_2)$, s'écrivent, conformément à la notation modale :

$$w_1(Q_1) = \sum_p \sum_q a_{1pq} \phi_{pq}(Q_1)$$

Eq. 2.33

$$w_2(Q_2) = \sum_p \sum_q a_{2pq} \phi_{pq}(Q_2)$$

Eq. 2.34

Si les expressions des Eq. 2.33 et Eq. 2.34 sont introduites dans les Eq. 2.31 et Eq. 2.32, des termes faisant intervenir des produits de bases modales apparaissent. En les réécrivant sous forme matricielle, on constate que le terme de gauche est équivalent à $\overline{\overline{Z'_1}} \vec{w}_1$ et que les termes de droite font apparaître les vecteurs \vec{w}_1 et \vec{w}_2 :

$$\overline{\overline{Z'_1}} \vec{w}_1 = -\overline{\overline{S'_{11}}} \vec{w}_1 + \overline{\overline{S'_{12}}} \vec{w}_2$$

Eq. 2.35

La sous-matrice d'impédance $\overline{\overline{S'_{11}}}$ représente l'influence de la liaison sur la plaque 1 et la sous-matrice d'impédance $\overline{\overline{S'_{12}}}$, le terme de couplage proprement dit, qui relie les 2 systèmes. Les termes génériques de ces deux matrices prennent la forme suivante :

$$(S'_{11})_{mn, pq} = \frac{k}{j\omega N_{mn}} \phi_{mn}(Q_1) \phi_{pq}(Q_1)$$

Eq. 2.36

$$(S'_{12})_{mn, pq} = \frac{k}{j\omega N_{mn}} \phi_{mn}(Q_1) \phi_{pq}(Q_2)$$

Eq. 2.37

La procédure reste exactement la même pour la plaque 2 :

$$\overline{\overline{Z}}_2 \overline{\overline{w}}_2 = -\overline{\overline{S}}_{21}' \overline{\overline{w}}_1 + \overline{\overline{S}}_{22}' \overline{\overline{w}}_2 \quad \text{Eq. 2.38}$$

$$(\overline{\overline{S}}_{22}')_{mn,pq} = \frac{k}{j\omega N_{mn}} \phi_{mn}(Q_2) \phi_{pq}(Q_2) \quad \text{Eq. 2.39}$$

$$(\overline{\overline{S}}_{21}')_{mn,pq} = \frac{k}{j\omega N_{mn}} \phi_{mn}(Q_2) \phi_{pq}(Q_1) \quad \text{Eq. 2.40}$$

Il est à noter que les sous-matrices $\overline{\overline{S}}_{ii}'$ sont formées du produit des vecteurs de la base modale du système i (considérées aux points Q_i). Elles représentent la traduction en terme d'impédance, du couplage inter-modal créé par la liaison sur le système i , c'est-à-dire l'influence d'un mode de la base sur un autre mode de la même base du fait du couplage. C'est aussi vrai sur la diagonale où l'on retrouve l'influence d'un mode sur lui-même.

De toutes ces dernières équations et plus particulièrement à partir des l'Eq. 2.35 et de l'Eq. 2.38, on peut écrire l'équilibre des deux systèmes sous forme matricielle en l'absence d'excitation extérieure, en faisant apparaître la matrice d'impédance de la plaque découplée libre $\overline{\overline{Z}}_i'$, la matrice de perturbation causée par la présence de l'élément de liaison, $\overline{\overline{S}}_{ii}'$, et enfin la matrice d'impédance représentant le couplage entre les deux systèmes $\overline{\overline{S}}_{ij}'$ ²:

$$\begin{bmatrix} \overline{\overline{Z}}_1' & \overline{\overline{0}} \\ \overline{\overline{0}} & \overline{\overline{Z}}_2' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{\overline{w}}_1 \\ \overline{\overline{w}}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\overline{\overline{S}}_{11}' & -\overline{\overline{S}}_{12}' \\ -\overline{\overline{S}}_{21}' & -\overline{\overline{S}}_{22}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{\overline{w}}_1 \\ \overline{\overline{w}}_2 \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 2.41}$$

On identifie la matrice d'impédance $\overline{\overline{Z}}$ globale³ pour les 2 systèmes couplés, matrice constituée de 4 sous-matrices $\overline{\overline{Z}}_{ij}'$ ($i = 1,2$ et $j = 1,2$) avec l'Eq. 2.41 :

$$\begin{bmatrix} \overline{\overline{Z}}_{11}' & \overline{\overline{Z}}_{12}' \\ \overline{\overline{Z}}_{21}' & \overline{\overline{Z}}_{22}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{\overline{w}}_1 \\ \overline{\overline{w}}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{Z}}_1' + \overline{\overline{S}}_{11}' & \overline{\overline{S}}_{12}' \\ \overline{\overline{S}}_{21}' & \overline{\overline{Z}}_2' + \overline{\overline{S}}_{22}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{\overline{w}}_1 \\ \overline{\overline{w}}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{\overline{0}} \\ \overline{\overline{0}} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 2.42}$$

Le vecteur de droite, pour l'instant nul, recevra ensuite les composantes de l'amplitude modale du vecteur excitation.

² Cette séparation entre l'impédance de la plaque et les termes de couplage se retrouve chez Maidanik [Maidanik 1976].

³ Noter la différence de notation entre l'impédance modale de la plaque simplement appuyée $\overline{\overline{Z}}_i'$ et l'impédance modale de la plaque chargée par le ressort $\overline{\overline{Z}}_{ii}'$, tous deux dans la base modale de la plaque découplée libre.

Les expressions indicées des sous-matrices d'impédances $\overline{\overline{Z'_{11}}}$ et $\overline{\overline{Z'_{22}}}$ dans la base (ϕ) sont données, en remplaçant les indices doubles des bases modales par un indice unique :

$$(Z'_{11})_{ij} = j\omega m'_1 \left[1 - \left(\frac{\omega'_{1ij}}{\omega} \right)^2 \right] \delta_{ij} + \frac{k}{j\omega} \phi_{1i}(Q_1) \phi_{1j}(Q_1)$$

Eq. 2.43

$$(Z'_{22})_{ij} = j\omega m'_2 \left[1 - \left(\frac{\omega'_{2ij}}{\omega} \right)^2 \right] \delta_{ij} + \frac{k}{j\omega} \phi_{2i}(Q_2) \phi_{2j}(Q_2)$$

Eq. 2.44

Les sous-matrices hors diagonale de la matrice d'impédance modale se notent :

$$(Z'_{12})_{mn} = \frac{k}{j\omega} \phi_{1m}(Q_1) \phi_{2n}(Q_2)$$

Eq. 2.45

$$(Z'_{21})_{mn} = \frac{k}{j\omega} \phi_{2n}(Q_2) \phi_{1m}(Q_1)$$

Eq. 2.46

2.1.5. Résolution classique de référence

La matrice de l'impédance modale étant définie, il est possible d'accéder au vecteur des amplitudes modales de la vitesse des systèmes couplés. En effet, si l'on définit un vecteur excitation $\{\bar{F}\}$ composé de deux sous vecteurs, l'un pour l'excitation de la plaque 1 et l'autre pour la plaque 2, on peut écrire l'équation qui relie la vitesse des plaques à la force excitatrice qui leur est soumise, par l'intermédiaire de la matrice d'impédance modale :

$$\begin{bmatrix} \overline{\overline{Z'_{11}}} & \overline{\overline{Z'_{12}}} \\ \overline{\overline{Z'_{21}}} & \overline{\overline{Z'_{22}}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{Bmatrix}$$

Eq. 2.47

Le vecteur des amplitudes modales de la vitesse s'obtient alors par le calcul de l'inverse de la matrice d'impédance :

$$\begin{Bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{Z'_{11}}} & \overline{\overline{Z'_{12}}} \\ \overline{\overline{Z'_{21}}} & \overline{\overline{Z'_{22}}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{Bmatrix}$$

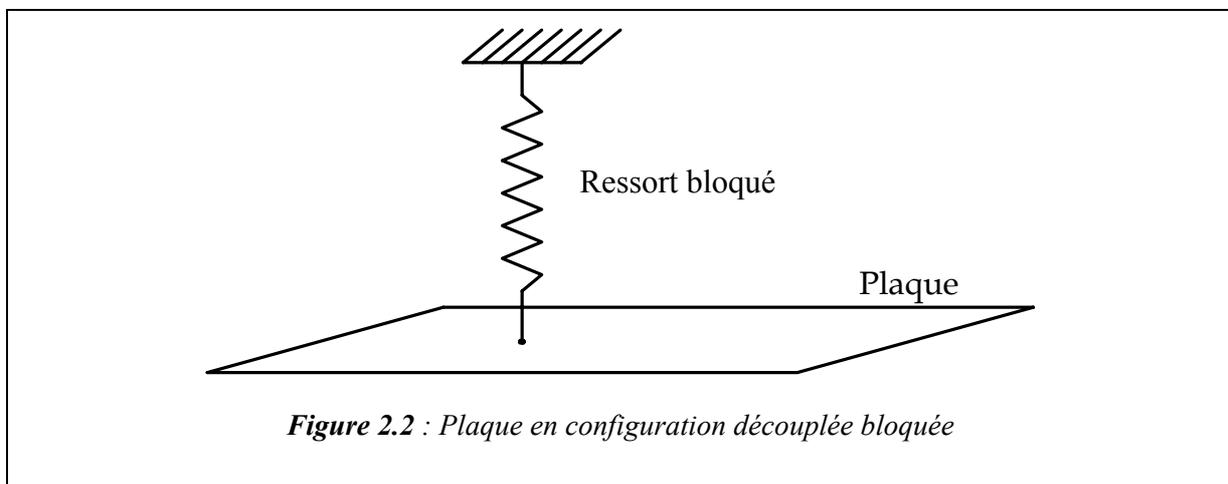
Eq. 2.48

Si l'expression mathématique de la matrice est simple dans le cas de figure étudié, le calcul numérique peut soulever des difficultés quand la matrice est de grande taille ou dans certaines configurations particulières (très forte raideur du ressort de couplage par exemple).

Lors des applications numériques effectuées au chapitre 4, cette technique de résolution sera utilisée comme solution de référence.

2.2. NOTION DE SYSTEME “DECOUPLE BLOQUE”

L'opérateur décrivant les plaques couplées par l'intermédiaire du ressort, a été projeté sur la base des modes des plaques découplées libres (*in-vacuo*), ce qui présente l'avantage de connaître ces modes de plaques de manière analytique, au moins dans le cas considéré de la plaque rectangulaire sur appui simple qui est considéré. Cependant, comme il sera vu dans ce chapitre, pour effectuer la démonstration des propriétés fondamentales des valeurs propres et vecteurs propres de couplage, il est judicieux d'exprimer le mouvement vibratoire des plaques par décomposition sur la base modale des plaques découplées bloquées, c'est-à-dire des plaques munies du ressort de liaison bloqué à l'autre extrémité (cf. Figure 2.2).



Ces modes n'ont pas d'expression analytique simple, mais dans le cadre d'une approximation, ils sont obtenus par la diagonalisation de la sous-matrice $\overline{\overline{Z}}'_{11}$ pour la plaque 1 et $\overline{\overline{Z}}'_{22}$ pour la plaque 2. Les modes des plaques découplées bloquées s'expriment alors comme la combinaison linéaire des modes des plaques découplées libres. La base modale de la plaque découplée libre se nomme (ϕ) , celle de la plaque découplée bloquée s'écrit (ψ) .

$$\vec{\psi}_i = \sum_{j=1}^N \beta_{ij} \vec{\phi}_j$$

Eq. 2.49

Les coefficients β_{ij} sont les composantes des vecteurs propres de la sous-matrice $\overline{\overline{Z}}'_{ii}$.

Dans les Eq. 2.43 et Eq. 2.44, les termes de l'impédance de la plaque découplée libre se trouvent sur la diagonale et les termes de couplage inter-modal remplissent toute la sous-matrice. Si la raideur k du ressort de liaison est très faible, alors les termes hors diagonale sont quasiment nuls et ceux qui restent sur la diagonale sont négligeables par rapport à

l'expression de l'impédance de la plaque découplée libre. Ainsi, pour des valeurs de raideur très faibles, la base modale de la plaque découplée libre, (ϕ) , peut être utilisée comme base modale du système découplé bloqué, (ψ) .

Le Tableau 2.1 donne les changements de dénomination des matrices d'impédances modale et des modes propres associés.

	Plaque découplée libre	Plaque découplée bloquée
Nom de la base modale	(ϕ)	(ψ)
Impédance modale	$\overline{\overline{Z}}'_{ij}$	$\overline{\overline{Z}}_{ij}$
Modes propres	ω'_{mn}	ω_{mn}

Tableau 2.1 : Dénominations des bases selon l'état de la plaque

Pour traiter le problème de deux plaques couplées, on change de base pour se placer dans la base modale des systèmes découplés bloqués. Ainsi, les sous-matrices $\overline{\overline{Z}}'_{11}$ et $\overline{\overline{Z}}'_{22}$ deviennent diagonales, ce qui permet par la suite d'exprimer analytiquement le mouvement de la plaque. La diagonalisation de $\overline{\overline{Z}}'_{11}$ et $\overline{\overline{Z}}'_{22}$ passe par la connaissance de leurs vecteurs propres, $\overline{\beta}_i$ et des matrices des vecteurs propres \overline{B}_{β_i} :

$$\overline{B}_{\beta_i}^{-1} \overline{\overline{Z}}'_{ii} \overline{B}_{\beta_i} = \overline{\overline{Z}}_{ii}$$

Eq. 2.50

Les expressions des sous-matrices d'impédance modale des plaques découplées bloquées s'écrivent de la manière suivante, quand ils sont exprimés dans la base modale des plaques découplées bloquées (ψ) :

$$(Z_{11})_{mn} = j\omega m'_1 \left[1 - \left(\frac{\omega_{1m}}{\omega} \right)^2 \right]$$

Eq. 2.51

$$(Z_{22})_{mn} = j\omega m'_2 \left[1 - \left(\frac{\omega_{2m}}{\omega} \right)^2 \right]$$

Eq. 2.52

Le fait de se placer dans cette nouvelle base de vibration ne change, dans l'expression analytique des sous-matrices $\underline{\underline{Z}}'_{12}$ et $\underline{\underline{Z}}'_{21}$ que les termes de la base modale (ϕ), qui sont remplacés par ceux de (ψ).

$$(\underline{\underline{Z}}_{12})_{mn} = \frac{k}{j\omega} \psi_{1m}(Q_1) \psi_{2n}(Q_2)$$

Eq. 2.53

$$(\underline{\underline{Z}}_{21})_{mn} = \frac{k}{j\omega} \psi_{2n}(Q_2) \psi_{1m}(Q_1)$$

Eq. 2.54

L'expression de la base modale (ψ) des systèmes découplés bloqués n'est pas utile et elle ne sera donc pas déterminée. Par contre, dans le cas étudié, on est obligé de passer par cette base pour mener à bien un calcul analytique. En effet, on verra dès le chapitre 3 que les sous-matrices $\underline{\underline{Z}}'_{11}$ et $\underline{\underline{Z}}'_{22}$ doivent être inversées. Si celles-ci sont diagonales, parce qu'exprimées dans la base modale des systèmes découplés bloqués, au lieu de l'inversion, une simple division suffit, et le déroulement analytique du calcul est préservé.

D'un point de vue numérique (programme informatique BNM), on n'opérera pas la recherche de la base modale des systèmes découplés bloqués. Pour des raisons de simplicité, on préfère garder les sous-matrices $\underline{\underline{Z}}'_{11}$ et $\underline{\underline{Z}}'_{22}$ dans leurs expressions des Eq. 2.43 et Eq. 2.44 et procéder à leur inversion. Tout le calcul s'effectue dans la base modale des plaques découplées libres (ϕ). Il apparaît d'ailleurs que quand la raideur du ressort de couplage est très faible, les sous-matrices $\underline{\underline{Z}}'_{11}$ et $\underline{\underline{Z}}'_{22}$ sont pratiquement diagonales et l'on peut prendre comme inverse, l'inverse des termes de leur diagonale, ce qui confirme le fait que la base modale des systèmes découplés bloqués (ψ) est pratiquement identique à la base modale des plaques découplées libres (ϕ) quand la raideur du ressort de liaison est suffisamment faible.

Remarque

La notion de système découplé bloqué a été abordée par Maidanik [Maidanik 1976] qui cherche à modéliser des systèmes complexes à partir du couplage de systèmes élémentaires, c'est-à-dire qu'il cherche à simplifier les sous-systèmes pour n'avoir à les décrire que par des quantités scalaires. Il inclut d'ailleurs les conditions aux limites dans l'opérateur linéaire d'impédance, (identique au concept de l'Eq. 2.47) de manière à diagonaliser l'opérateur reliant l'excitation extérieure et la réponse du système complexe.

2.3. MATRICE DE COUPLAGE

Dans le but de faire apparaître une matrice de couplage et une équation du type Eq. 1.12, on applique le formalisme qui a été utilisé au chapitre 1.

2.3.1. Construction de la matrice de couplage

Les expressions des sous-matrices utilisées dans ce paragraphe ne dépendent pas des bases modales utilisées. Par souci de clarté, on utilisera donc une notation sans prime.

L'Eq. 2.55 donne la forme standard de l'équation de la vitesse :

$$\begin{bmatrix} \overline{\overline{Z}}_{11} & \overline{\overline{Z}}_{12} \\ \overline{\overline{Z}}_{21} & \overline{\overline{Z}}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{F}_2 \end{Bmatrix}$$

Eq. 2.55

Les sous-matrices $\overline{\overline{Z}}_{12}$ et $\overline{\overline{Z}}_{21}$ d'impédance modale relient la vitesse de la plaque 1 à la force d'excitation sur la plaque 2 (et réciproquement). Le chapitre 1 a montré que pour une bonne exploitation des termes relatifs au couplage, il est préférable de les adimensionaliser. Pour ce faire, il suffit de diviser chaque ligne des deux équations contenues dans l'Eq. 2.55 par le bloc correspondant à l'impédance du système découplé bloqué, $\overline{\overline{Z}}_{11}$ et $\overline{\overline{Z}}_{22}$ (ou plus rigoureusement, de faire le produit par l'inverse des blocs correspondants à l'impédance de la plaque chargée par le ressort), comme le montrent les systèmes d'équations développées suivantes. Ainsi, l'Eq. 2.55 est reformulée pour prendre la dimension d'une vitesse :

$$\begin{cases} \overline{\overline{Z}}_{11} \vec{w}_1 + \overline{\overline{Z}}_{12} \vec{w}_2 = \vec{F}_1 \\ \overline{\overline{Z}}_{21} \vec{w}_1 + \overline{\overline{Z}}_{22} \vec{w}_2 = \vec{F}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{w}_1 + \overline{\overline{Z}}_{11}^{-1} \overline{\overline{Z}}_{12} \vec{w}_2 = \overline{\overline{Z}}_{11}^{-1} \vec{F}_1 \\ \overline{\overline{Z}}_{22}^{-1} \overline{\overline{Z}}_{21} \vec{w}_1 + \vec{w}_2 = \overline{\overline{Z}}_{22}^{-1} \vec{F}_2 \end{cases}$$

Eq. 2.56

Les termes de droite, produits de la force d'excitation sur la plaque par l'inverse de l'impédance de la plaque quand celle-ci est soumise aux effets de la liaison, ont aussi la dimension de vitesse. Il s'agit de la vitesse du système découplé bloqué que l'on appellera parfois de manière abrégée, vitesse découplée bloquée. Cette vitesse est notée \vec{w}_o et est définie par :

$$\begin{cases} \vec{w}_{o1} = \overline{\overline{Z}}_{11}^{-1} \vec{F}_1 \\ \vec{w}_{o2} = \overline{\overline{Z}}_{22}^{-1} \vec{F}_2 \end{cases}$$

Eq. 2.57

L'Eq. 2.56 est réécrite en fonction de cette vitesse nouvellement défini, et les produits des sous-matrices $\overline{\overline{Z}}_{ij}^{-1}$ prennent alors la notation $\overline{\overline{C}}_{ij}$:

$$\begin{cases} \overline{\overline{w}}_1 + \overline{\overline{C}}_{12} \overline{\overline{w}}_2 = \overline{\overline{w}}_{o1} \\ \overline{\overline{w}}_2 + \overline{\overline{C}}_{21} \overline{\overline{w}}_1 = \overline{\overline{w}}_{o2} \end{cases}$$

Eq. 2.58

Sous une forme matricielle qui respecte le formalisme adopté et avec $\overline{\overline{I}}$, matrice unité de dimensions (MxM) ou (NxN)⁴, l'Eq. 2.58 se reformule sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \overline{\overline{I}} & \overline{\overline{C}}_{12} \\ \overline{\overline{C}}_{21} & \overline{\overline{I}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{\overline{w}}_1 \\ \overline{\overline{w}}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{\overline{w}}_{o1} \\ \overline{\overline{w}}_{o2} \end{Bmatrix}$$

Eq. 2.59

Isoler les composantes directement liées au couplage, c'est-à-dire les sous-matrices $\overline{\overline{C}}_{ij}$, mène à :

$$\begin{Bmatrix} \overline{\overline{w}}_1 \\ \overline{\overline{w}}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\overline{0}} & \overline{\overline{C}}_{12} \\ \overline{\overline{C}}_{21} & \overline{\overline{0}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{\overline{w}}_1 \\ \overline{\overline{w}}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{\overline{w}}_{o1} \\ \overline{\overline{w}}_{o2} \end{Bmatrix}$$

Eq. 2.60

Cette forme est analogue à celle proposée au chapitre 1 en Eq. 1.10. Elle fait apparaître une matrice adimensionnelle, la matrice de couplage $\overline{\overline{C}}$ qui est constituée de quatre sous-matrices. Les deux blocs diagonaux sont nuls, ce qui est logique pour une matrice de couplage puisqu'ils relient des quantités appartenant au même système. Les deux blocs non diagonaux $\overline{\overline{C}}_{ij}$ introduisent l'interaction des systèmes i et j. $\overline{\overline{C}}_{12}$ est de dimensions (MxN) et $\overline{\overline{C}}_{21}$ de dimensions (NxM).

Remarque

Cette formulation se retrouve sous une expression très similaire dans l'article de [Maidanik 1976], bien que les vecteurs représentent alors les N positions de points de couplage pour les N sous-systèmes élémentaires.

⁴ Pour des raisons numériques, on admet ne prendre en compte qu'un nombre limité de modes de vibration dans chaque système (généralement, pour des raisons d'homogénéité entre les systèmes, on fixe une limite supérieure en fréquence et on ne considère que les modes de pulsations inférieures à cette limite), par exemple M modes pour le système 1 et N modes pour le système 2.

2.3.2. Propriétés de la matrice de couplage

La matrice de couplage est indépendante de l'excitation, elle caractérise donc intrinsèquement le couplage. La matrice de couplage est une matrice carrée de dimensions $(M+N \times M+N)$.

Les quantités propres de la matrice de couplage sont étudiées. Les valeurs propres et vecteurs propres de couplage peuvent être utilisés pour reconstruire la solution en vitesse. Ces quantités propres sont d'autant plus intéressantes qu'elle ne dépendent pas de la base modale utilisée (découplée libre ou découplée bloquée).

2.3.2.1. Paires de valeurs propres de couplage

On s'intéresse aux quantités propres (valeurs propres et vecteurs propres de couplage) associées à la matrice de couplage. Les valeurs propres sont appelées λ_i et les vecteurs propres $\{\vec{\varphi}\}$, avec $\vec{\varphi}_{1i}$ vecteur propre de couplage associé au système 1 et $\vec{\varphi}_{2i}$ au système 2, où i est un entier qui décrit l'ensemble des $(M+N)$ modes de vibration des quantités propres.

Si le vecteur propre de couplage est non identiquement nul, les quantités propres de couplage répondent à l'équation suivante :

$$\overline{\overline{C}} \begin{Bmatrix} \vec{\varphi}_1 \\ \vec{\varphi}_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \vec{\varphi}_1 \\ \vec{\varphi}_2 \end{Bmatrix}$$

Eq. 2.61

De manière développée, celle-ci s'écrit :

$$\begin{cases} \overline{\overline{C}}_{12} \vec{\varphi}_2 = \lambda \vec{\varphi}_1 \\ \overline{\overline{C}}_{21} \vec{\varphi}_1 = \lambda \vec{\varphi}_2 \end{cases}$$

Eq. 2.62

En faisant le produit de la première ligne par la sous-matrice de couplage $\overline{\overline{C}}_{21}$ et la deuxième ligne par $\overline{\overline{C}}_{12}$, le jeu d'équations suivant apparaît :

$$\begin{cases} \overline{\overline{C}}_{21} \overline{\overline{C}}_{12} \vec{\varphi}_2 = \lambda^2 \vec{\varphi}_2 \\ \overline{\overline{C}}_{12} \overline{\overline{C}}_{21} \vec{\varphi}_1 = \lambda^2 \vec{\varphi}_1 \end{cases}$$

Eq. 2.63

Les termes $\overline{\overline{C}}_{12} \overline{\overline{C}}_{21}$ et $\overline{\overline{C}}_{21} \overline{\overline{C}}_{12}$ ne sont rien d'autre que les sous-matrices issues de la matrice de couplage au carré :

$$\begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{\overline{C_{12}}} \\ \overline{\overline{C_{21}}} & \overline{0} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \overline{\overline{C_{12}C_{12}}} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{\overline{C_{12}C_{12}}} \end{bmatrix}$$

Eq. 2.64

Les deux expressions de l'Eq. 2.63 montrent que l'on peut indifféremment obtenir les valeurs propres de couplage au carré à partir de $\overline{\overline{C_{12}C_{21}}}$ ou de $\overline{\overline{C_{21}C_{12}}}$. Comme l'on admet ne prendre en compte qu'un nombre limité de modes de vibration dans chaque système, le nombre total d'éléments de la matrice de couplage est $(M+N)^2$. Les sous-matrices $\overline{\overline{C_{12}C_{21}}}$ et $\overline{\overline{C_{21}C_{12}}}$ sont donc de dimensions $(M \times M)$ et $(N \times N)$.

Soit p le minimum de (M, N) ; l'Eq. 2.63 montre qu'il y a au maximum p valeurs propres de couplage au carré notées λ_i^2 , $i=1, p$. On en déduit que la matrice de couplage admet un certain nombre de paires de valeurs propres de couplage appelées alors $\lambda_i^{(\pm)}$. La propriété évidente qui existe entre ces couples de valeurs propres est, pour la $i^{\text{ème}}$ valeur propre :

$$\lambda_i^{(+)} = -\lambda_i^{(-)}$$

Eq. 2.65

La nullité de la trace de $\overline{\overline{C}}$ est alors évidente et remarquable. Bien sûr, à une paire de valeurs propres de couplage correspond une paire de vecteurs propres de couplage. Si l'on attribue les signes (+) ou (-) au vecteur propre correspondant, et si l'on omet l'indice i pour une meilleure lisibilité, il vient :

$$\lambda^{(+)} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \overline{\overline{\varphi_1^{(+)}} \\ \overline{\overline{\varphi_2^{(+)}}} \end{Bmatrix} \lambda^{(-)} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \overline{\overline{\varphi_1^{(-)}}} \\ \overline{\overline{\varphi_2^{(-)}}} \end{Bmatrix}$$

Eq. 2.66

L'équation fondamentale des quantités propres (cf. Eq. 2.61) est appliquée à chacune des expressions de l'Eq. 2.66.

$$\begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{\overline{C_{12}}} \\ \overline{\overline{C_{21}}} & \overline{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{\overline{\varphi_1^{(+)}}} \\ \overline{\overline{\varphi_2^{(+)}}} \end{Bmatrix} = \lambda^{(+)} \begin{Bmatrix} \overline{\overline{\varphi_1^{(+)}}} \\ \overline{\overline{\varphi_2^{(+)}}} \end{Bmatrix}$$

Eq. 2.67

$$\begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{\overline{C_{12}}} \\ \overline{\overline{C_{21}}} & \overline{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{\overline{\varphi_1^{(-)}}} \\ \overline{\overline{\varphi_2^{(-)}}} \end{Bmatrix} = \lambda^{(-)} \begin{Bmatrix} \overline{\overline{\varphi_1^{(-)}}} \\ \overline{\overline{\varphi_2^{(-)}}} \end{Bmatrix}$$

Eq. 2.68

Les secondes lignes des deux équations précédentes sont :

$$\left| \begin{array}{l} \overline{\overline{C_{21}}} \vec{\varphi}_1^{(+)} = \lambda^{(+)} \vec{\varphi}_2^{(+)} \\ \overline{\overline{C_{21}}} \vec{\varphi}_1^{(-)} = \lambda^{(-)} \vec{\varphi}_2^{(-)} \end{array} \right.$$

Eq. 2.69

Les vecteurs propres $\vec{\varphi}_1^{(+)}$ et $\vec{\varphi}_1^{(-)}$ sont solutions de la même équation aux valeurs propres (cf. Eq. 2.63). Ils sont définis à une constante multiplicative près ; on peut poser sans hypothèse particulière :

$$\vec{\varphi}_1^{(+)} = \vec{\varphi}_1^{(-)}$$

Eq. 2.70

Ainsi, l'introduction de l'Eq. 2.70 dans l'Eq. 2.69, et l'égalisation des seconds membres des deux équations conduisent à :

$$\overline{\overline{C_{21}}} \vec{\varphi}_1^{(+)} = \overline{\overline{C_{21}}} \vec{\varphi}_1^{(-)} \Leftrightarrow \lambda^{(+)} \vec{\varphi}_2^{(+)} = \lambda^{(-)} \vec{\varphi}_2^{(-)}$$

Eq. 2.71

L'Eq. 2.65 fournissant une relation de signe entre les deux valeurs propres de couplage, les deuxièmes parties de vecteurs propres de couplages sont reliées par :

$$\vec{\varphi}_2^{(+)} = -\vec{\varphi}_2^{(-)}$$

Eq. 2.72

Finalement, il apparaît que la partie positive ou négative du vecteur propre est suffisante pour décrire complètement le vecteur propre de couplage. Cet argument autorise la réécriture de l'Eq. 2.66 comme :

$$\lambda^{(+)} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{\varphi}_1^{(+)} \\ \vec{\varphi}_2^{(+)} \end{array} \right\} \lambda^{(-)} = -\lambda^{(+)} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{\varphi}_1^{(+)} \\ -\vec{\varphi}_2^{(+)} \end{array} \right\}$$

Eq. 2.73

L'ambiguïté de signe des vecteurs propres de couplage est levée ; son indication sera dorénavant omise. On note :

$$\lambda \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{\varphi}_1 \\ \vec{\varphi}_2 \end{array} \right\} - \lambda \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{\varphi}_1 \\ -\vec{\varphi}_2 \end{array} \right\}$$

Eq. 2.74

Remarque

On a vu qu'il est possible de calculer les valeurs propres de couplage au carré à partir des sous-matrices de la matrice de couplage au carré. D'un point de vue numérique, cela revêt une importance particulière. En effet, l'algorithme standard de recherche des valeurs propres,

qui est parfois malmené du fait de l'existence des paires de valeurs propres opposées, retrouve une plus grande fiabilité. A partir d'une de ces sous-matrices, il est plus facile d'en extraire les valeurs propres de couplage au carré, et une partie du vecteur propre, l'autre partie du vecteur propre de couplage s'obtenant alors facilement à partir de l'une ou l'autre des Eq. 2.62. De plus, la manipulation de ces sous-matrices de couplage est facilitée du fait que leurs dimensions (MxM) ou (NxN) sont moins importantes que celles de la matrice de couplage (M+N x M+N).

2.3.2.2. Groupement des vecteurs propres de couplage

Dans le seul but de simplifier les calculs et les expressions, on procède au groupement de la contribution des vecteurs propres de couplage. Soit un vecteur $\{\bar{X}\}$ qui s'exprime à l'aide d'un couple de vecteurs propres et de coefficients d'amplitude a^+ et a^- .

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{Bmatrix} = a^+ \begin{Bmatrix} \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}_2 \end{Bmatrix} + a^- \begin{Bmatrix} \bar{\varphi}_1 \\ -\bar{\varphi}_2 \end{Bmatrix}$$

Eq. 2.75

Si l'on introduit les coefficients d'amplitude α_i , appelés par la suite coefficients propres (ou facteurs propres) pour signifier leur lien avec les valeurs et vecteurs propres de couplage :

$$\begin{cases} \alpha_1 = a^+ + a^- \\ \alpha_2 = a^+ - a^- \end{cases}$$

Eq. 2.76

On peut alors exprimer le vecteur $\{\bar{X}\}$ de la façon suivante :

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (a^+ + a^-)\bar{\varphi}_1 \\ (a^+ - a^-)\bar{\varphi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \bar{\varphi}_1 \\ \alpha_2 \bar{\varphi}_2 \end{Bmatrix}$$

Eq. 2.77

Finalement, on a montré qu'un seul des vecteurs propres de couplage suffit à décrire un vecteur.

2.3.2.3. Permutation des coefficients du vecteur propre de couplage

Le produit de la matrice de couplage avec le vecteur $\{\bar{X}\}$ défini auparavant, conduit après calculs à :

$$\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{C}_{12} \\ \bar{C}_{21} & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{C}_{12} \\ \bar{C}_{21} & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \bar{\Phi}_1 \\ \alpha_2 \bar{\Phi}_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \alpha_2 \bar{\Phi}_1 \\ \alpha_1 \bar{\Phi}_2 \end{Bmatrix}$$

Eq. 2.78

L'Eq. 2.78 est très voisine d'une équation aux valeurs propres, mais n'y correspond pas vraiment car les amplitudes α_1 et α_2 sont permutées dans le vecteur du second membre.

2.4. RESOLUTION PAR LA METHODE ITERATIVE

Cette méthode est connue sous le nom de Gauss-Seidel [Leon 1983, Press 1992]. Elle permet de déterminer le vecteur de la vitesse des systèmes couplés à partir de celui de la vitesse des systèmes découplés bloqués et de la matrice de couplage. En cela, elle utilise les mêmes éléments de base que la méthode déjà décrite au chapitre 1.

L'Eq. 2.60 sert de point de départ de la résolution itérative, après un léger remaniement qui la formalise ainsi :

$$[\bar{I} - \bar{C}]\{\bar{w}\} = \{\bar{w}_o\}$$

Eq. 2.79

Ce qui mène trivialement à l'expression du vecteur vitesse :

$$\{\bar{w}\} = [\bar{I} - \bar{C}]^{-1} \{\bar{w}_o\}$$

Eq. 2.80

Sous certaines conditions, on admet que la matrice à inverser peut se développer. Le vecteur des amplitudes modales de la vitesse s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \{\bar{w}\} &= \left[\bar{I} + \bar{C} + \bar{C}^2 + \bar{C}^3 + \dots + \bar{C}^p + \dots \right] \{\bar{w}_o\} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \bar{C}^i \{\bar{w}\}_o \end{aligned}$$

Eq. 2.81

Les vecteurs propres de la matrice de couplage permettent de la diagonaliser, et d'obtenir alors une matrice dont les termes de la diagonale sont les valeurs propres de couplage :

$$\bar{C} = \bar{\Phi}^{-1} \Lambda_d \bar{\Phi}$$

Eq. 2.82

$\bar{\Phi}$ est la matrice des vecteurs propres de couplage et Λ_d est la matrice ayant les valeurs propres de couplage sur sa diagonale. Etant donné que $\bar{\Phi} \bar{\Phi}^{-1} = \bar{I}$, on montre que l'élévation de la matrice de couplage au carré entraîne :

$$\bar{C}^2 = \bar{\Phi}^{-1} \Lambda_d \bar{\Phi} \bar{\Phi}^{-1} \Lambda_d \bar{\Phi} = \bar{\Phi}^{-1} \Lambda_d^2 \bar{\Phi}$$

Eq. 2.83

Ainsi, en reproduisant ce processus à des ordres plus élevés, l'Eq. 2.81 peut s'écrire :

$$\{\bar{w}\} = \left[\bar{I} + \bar{C} + \bar{C}^2 + \bar{C}^3 + \dots \right] \{\bar{w}_o\} = \left[\bar{\Phi}^{-1} \left[\bar{I} + \bar{\Lambda}_d + \bar{\Lambda}_d^2 + \bar{\Lambda}_d^3 + \dots \right] \bar{\Phi} \right] \{\bar{w}_o\}$$

Eq. 2.84

Cette dernière équation ne converge que si le module de la plus grande des valeurs propres de couplage est inférieure à un. Les échanges entre une plaque et l'autre vont alors en décroissant, selon la puissance affectée à la matrice des valeurs propres de couplage.

Le fait que $|\lambda|$ soit inférieure à un indique que les échanges sont décroissants entre les systèmes, donc que le couplage est faible. Dans ce cas-là seulement, il est judicieux de considérer deux sous-systèmes dont les comportements sont connus indépendamment.

2.5. CONCLUSION

Ce chapitre a permis de poser les bases utiles à la résolution du problème de deux plaques couplées par l'intermédiaire d'un ressort, généralisation du cas envisagé au chapitre 1, quand les systèmes couplés ont des caractéristiques multimodales.

Les divers éléments qui composent le modèle ont été étudiés sous l'angle mécanique avant d'être décrits dans le cadre de l'approche modale. Ainsi, sur la base fonctionnelle des plaques découplées libres sont définies l'impédance modale des plaques chargées par le ressort et l'impédance modale qui relie la force appliquée sur un système à la vitesse de l'autre système.

La matrice d'impédance qui donne les vitesses des différents modes vibratoires n'est pas diagonale puisque les modes considérés sont ceux des systèmes découplés libres que la présence du couplage désorthogonalise. C'est le couplage intermodal qui remplit cette matrice, c'est-à-dire l'influence provoquée par le couplage d'un mode de la plaque sur un autre mode de cette plaque. En se plaçant dans la base modale des systèmes découplés bloqués, on diagonalise la matrice d'impédance modale. Ainsi, le déroulement analytique du calcul est préservé.

La matrice d'impédance modale qui décrit les échanges entre les deux systèmes, sert à écrire la solution de référence d'une part, et à former la matrice de couplage d'autre part. La matrice de couplage au carré montre que les valeurs propres de couplage existent par paires de signe opposé. Les vecteurs propres de couplage peuvent être regroupés de manière à ce que n'importe quel vecteur puisse être écrit en fonction de la partie positive (par exemple) des vecteurs propres de couplage.

Le dernier paragraphe étudie succinctement la méthode itérative qui a été historiquement à la base de cette recherche sur les valeurs propres de couplage. Celle-ci met en avant le fait que la solution en vitesse des systèmes couplés est égale à la somme de contributions proportionnelles à la vitesse des systèmes découplés bloqués par l'intermédiaire des valeurs propres de couplage élevées à une puissance croissante. Cela signifie que la convergence n'est assurée que si le module de la valeur propre de couplage est inférieur à l'unité. Dans ce cas, la contribution d'un système à l'autre fait des aller-retours dont l'intensité va décroissant.

La valeur unité pour la valeur propre de couplage a déjà été rencontrée au premier chapitre : elle correspond au couplage maximum des deux systèmes. La méthode itérative fait aussi apparaître cette valeur spécifique qui détermine alors la convergence générale de la série.

Ce chapitre a décrit les bases de résolutions dans le cas du modèle multimodal constitué de deux plaques couplées par un ressort, en démontrant certaines propriétés générales des quantités propres de couplage. Le chapitre suivant va utiliser ces propriétés pour s'intéresser au cas spécifique du couplage par un ressort en donnant les expressions analytiques des matrices de couplage, quantités propres de couplage et autres coefficients propres. Ainsi, la résolution en vitesse des plaques couplées sera montrée.

* * *

*

CHAPITRE 3

Deux plaques couplées par un seul ressort

CHAPITRE 3 - SOMMAIRE

3.1. ETUDE DE LA VALEUR PROPRE DE COUPLAGE

- 3.1.1. Construction de la matrice de couplage
- 3.1.2. Méthode pour déterminer la valeur propre de couplage
- 3.1.3. Propriétés de la valeur propre de couplage
- 3.1.4. Résultats numériques

3.2. DETERMINATION DU VECTEUR PROPRE DE COUPLAGE

- 3.2.1. Expression analytique du vecteur propre de couplage
- 3.2.2. Calcul numérique du vecteur propre de couplage

3.3. ANALYSE PARAMETRIQUE

- 3.3.1. Influence de la raideur de la liaison sur la valeur propre de couplage
- 3.3.2. Influence de l'amortissement structural sur la valeur propre de couplage

3.4. RESOLUTION ANALYTIQUE

- 3.4.1. Projection des vecteurs vitesse sur la base des vecteurs propres
- 3.4.2. Détermination des coefficients propres
 - 3.4.2.1. *Coefficients propres des systèmes couplés*
 - 3.4.2.2. *Coefficients propres des systèmes découplés bloqués*
- 3.4.3. Interprétation

3.5. CONCLUSION

3. Deux plaques couplées par un seul ressort

Dans le premier chapitre, la résolution du problème de deux systèmes à un degré de liberté a été exposée au moyen de deux méthodes : l'une classique par inversion de la matrice d'impédance et l'autre, nouvelle, basée sur l'exploitation des quantités propres de la matrice de couplage. Dans le chapitre présent, les mêmes méthodes de résolution seront appliquées mais cette fois à des systèmes multimodaux. Le modèle étudié est constitué de deux plaques minces couplées par un ressort qui a été présenté au chapitre 2. Il y a été établis les bases nécessaires à cette étude, tant au niveau des bases modales de la plaque qu'au niveau de la caractérisation de la liaison par le ressort. La matrice de couplage a aussi fait l'objet d'une étude générale.

Dans un premier temps, l'unique valeur propre de couplage sera étudiée. On verra comment la calculer, ses propriétés et on effectuera une étude paramétrique. Le fait qu'elle soit unique, même dans une configuration multimodale sera bien sûr démontré. Les vecteurs propres de couplage seront étudiés sensiblement selon les mêmes axes (et interprétés physiquement). Enfin, la résolution du problème des deux plaques couplées par un ressort à l'aide des quantités propres de couplage sera décrite. Elle s'obtient par une technique très proche de celle mise en œuvre au chapitre 1.

Remarque informatique : Tout le travail théorique et expérimental de cette thèse a été suivi de l'écriture (en parallèle) d'un logiciel nommé "BNM". Quelques 11 000 lignes de Fortran ont été écrites sur H.P. 9000 séries 700. Elles ont servi de support à la théorie, en autorisant une grande souplesse dans la gestion des données et dans l'analyse paramétrique, avec en sus de nombreuses possibilités de sorties graphiques. L'utilisation du formalisme modal a imposé une structure vectorielle réellement très proche de la théorie analytique. De plus, comme l'approche modale repose sur des bases physiques fortes, cela entraîne des solutions convergentes sur un assez faible nombre de modes. Conséquemment, les calculs effectués lors des phases de développement ont pu être très rapides. Même dans le cas où l'on cherche un résultat sur une large plage fréquentielle (10-10 000 Hz), le temps de calcul reste raisonnable (environ xx minutes CPU par point de fréquence sur station H.P. 9000). Ce formalisme avait déjà été utilisé dans le logiciel ATLAS [Gagliardini 1991a] développé au C.S.T.B., logiciel qui permet de simuler numériquement la transmission acoustique par les parois simples et doubles. A ce titre, l'introduction dans ATLAS des nouvelles méthodes de résolution programmées dans BNM, sera très simple.

3.1. ETUDE DE LA VALEUR PROPRE DE COUPLAGE

3.1.1. Construction de la matrice de couplage

Pour construire la matrice de couplage, on s'appuie sur les expressions des sous-matrices de la matrice d'impédance, quand les systèmes sont découplés bloqués. Elles ont déjà été données au chapitre 2 en Eq. 2.51 et Eq. 2.52.

Les termes génériques des sous-matrices, (Z_{ij}), ne s'écriront désormais plus qu'avec un seul indice puisqu'elles sont diagonales. On déduit les termes génériques des sous-matrices de la matrice de couplage. Ceux de \overline{C}_{12} et \overline{C}_{21} valent :

$$(\overline{C}_{12})_{mn} = \frac{k}{j\omega} \frac{\psi_{1m}(Q_1)}{Z_{11_m}} \psi_{2n}(Q_2)$$

Eq. 3.1

$$(\overline{C}_{21})_{mn} = \frac{k}{j\omega} \frac{\psi_{2n}(Q_2)}{Z_{22_n}} \psi_{1m}(Q_1)$$

Eq. 3.2

3.1.2 Méthode pour déterminer la valeur propre de couplage

Le chapitre 2 a montré que les valeurs propres sont plus facilement accessibles à partir des sous-matrices de la matrice de couplage au carré. Si l'on considère l'expression littérale de la $mn^{\text{ème}}$ composante de $\overline{C}_{12}\overline{C}_{21}$ (étant entendu que le même calcul peut être fait avec $\overline{C}_{21}\overline{C}_{12}$) :

$$(\overline{C}_{12}\overline{C}_{21})_{mn} = -\frac{k^2}{\omega^2} \frac{\psi_{1m}(Q_1)\psi_{1n}(Q_1)}{Z_{11_m}} \sum_s \frac{\psi_{2s}^2(Q_2)}{Z_{22_s}}$$

Eq. 3.3

Une quantité scalaire multiplicative de tous les termes apparaît dans cette expression : le terme $\sum_s \psi_{2s}^2(Q_2)/Z_{22_s}$. Il peut être vu comme la vitesse du système 2 découplé bloqué, w_{o2} , quand il est soumis à une force unitaire à son point de couplage Q_2 (cf. Figure 3.1). En effet, en utilisant l'équation du mouvement (cf. Eq. 2.55) dans le cas d'une excitation unitaire au point Q_2 , il vient :

$$\overline{Z}_{22}^{-1} \overline{\psi}_2(Q_2) = \overline{w}_{o2}$$

Eq. 3.4

La $n^{\text{ème}}$ composante de ce vecteur des amplitudes modales de la vitesse se note :

$$(w_{o2})_n = \frac{\psi_{2_n}(Q_2)}{Z_{22_n}}$$

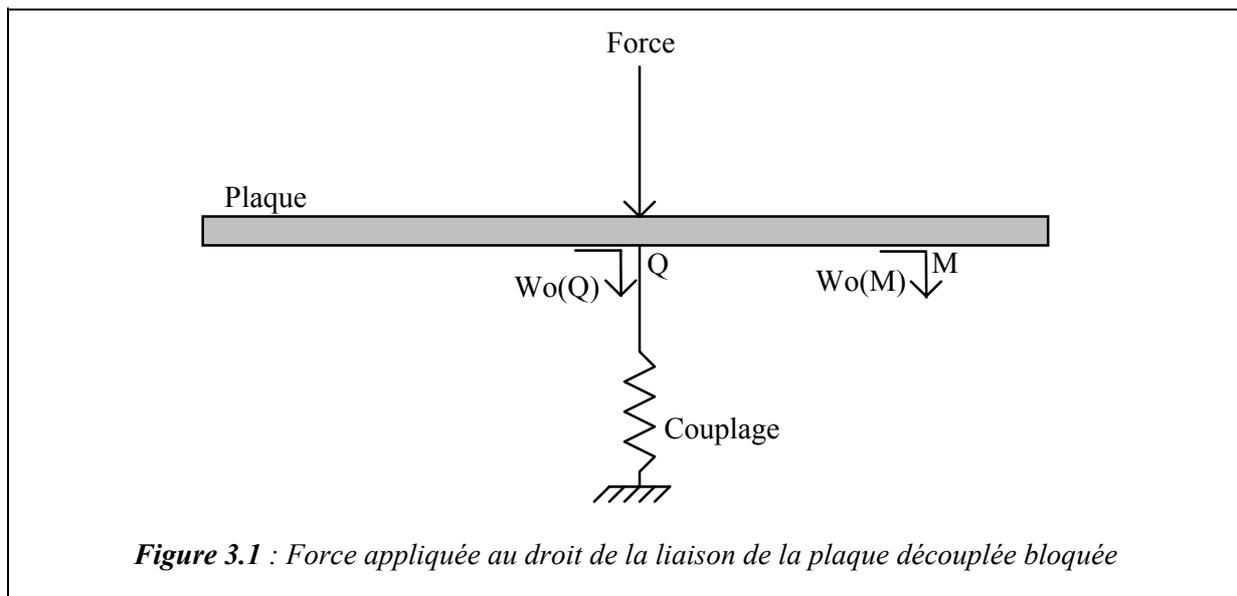
Eq. 3.5

La vitesse au point Q_2 s'obtient en cumulant les n réponses modales d'amplitude $(w_{o2})_n$ avec la déformée modale prise au point Q_2 , soit, avec l'Eq. 3.4 :

$$Y_2(Q_2) = \sum_n \left\{ \frac{\psi_{2_n}^2(Q_2)}{Z_{22_n}} \right\}$$

Eq. 3.6

Cette grandeur est la mobilité d'entrée de la plaque 2 découplée bloquée au point de connexion du ressort de couplage.



La matrice $\overline{\overline{C_{12}C_{21}}}$ étant construite par le produit de deux vecteurs (cf. Remarque à la fin du paragraphe), il s'ensuit qu'elle est de rang 1. Comme le nombre de valeurs propres d'une matrice est donné par son rang, on en déduit que cette sous-matrice de couplage n'admet qu'une seule valeur propre. De plus, l'expression de cette valeur propre est extraite indirectement en utilisant le fait que la trace d'une matrice est égale à la somme des valeurs propres. Comme il n'existe qu'une seule valeur propre, on obtient directement (cf. Eq. 3.3) :

$$\lambda^2 = \text{Trace}(\overline{\overline{C_{12}C_{21}}})$$

$$\lambda^2 = -\frac{k^2}{\omega^2} Y_2(Q_2) \sum_s \left\{ \frac{\psi_{1s}^2(Q_1)}{Z_{11s}} \right\}$$

Eq. 3.7

On vérifie aisément que la valeur propre de couplage peut être calculée indifféremment à partir de $\overline{\overline{C_{12}C_{21}}}$ ou de $\overline{\overline{C_{21}C_{12}}}$. L'expression de la mobilité donnée en Eq. 3.6 permet d'écrire la valeur propre de couplage sous une forme condensée ne dépendant que des mobilités des systèmes découplés bloqués au point de connexion, de la raideur de la liaison et de la pulsation :

$$\lambda^2 = -\frac{k^2}{\omega^2} Y_1(Q_1) Y_2(Q_2)$$

Eq. 3.8

Et donc, la matrice de couplage, de dimensions (M+N x M+N), n'admet qu'un seul couple de valeurs propres opposées :

$$\lambda^\pm = \pm \frac{k}{j\omega} \sqrt{Y_1(Q_1) Y_2(Q_2)}$$

Eq. 3.9

On remarque que le chapitre 1 avait déjà donné un résultat tout à fait similaire en ce qui concerne l'expression de la valeur propre de couplage entre deux résonateurs.

Remarque

Parce que parfois plus explicites, les mêmes expressions des sous-matrices d'impédance modale ou de couplage sont rappelées maintenant sous une notation vectorielle. Les impédances dues à la liaison uniquement sont :

$$\overline{\overline{Z_{12}}} = \frac{k}{j\omega} \vec{\psi}_1(Q_1) \vec{\psi}_2(Q_2)^t$$

Eq. 3.10

$$\overline{\overline{Z_{21}}} = \frac{k}{j\omega} \vec{\psi}_2(Q_2) \vec{\psi}_1(Q_1)^t$$

Eq. 3.11

Les sous-matrices de couplage s'écrivent :

$$\overline{\overline{C}}_{12} = \frac{k}{j\omega} \overline{\overline{Z}}_{11}^{-1} \bar{\psi}_1(Q_1) \bar{\psi}_2(Q_2)^t$$

Eq. 3.12

$$\overline{\overline{C}}_{21} = \frac{k}{j\omega} \overline{\overline{Z}}_{22}^{-1} \bar{\psi}_2(Q_2) \bar{\psi}_1(Q_1)^t$$

Eq. 3.13

La sous-matrice de couplage au carré s'écrit

$$\overline{\overline{C}}_{12} \overline{\overline{C}}_{21} = -\frac{k^2}{\omega^2} \overline{\overline{Z}}_{11}^{-1} \bar{\psi}_1(Q_1) \bar{\psi}_2(Q_2)^t \overline{\overline{Z}}_{22}^{-1} \bar{\psi}_2(Q_2) \bar{\psi}_1(Q_1)^t$$

Eq. 3.14

Dans cette expression apparaît un terme scalaire de forme $\bar{\psi}_2(Q_2)^t \overline{\overline{Z}}_{22}^{-1} \bar{\psi}_2(Q_2)$ qui représente la mobilité d'entrée de la plaque 2 au point Q_2 . Elle se note alors :

$$Y_2(Q_2) = \bar{\psi}_2(Q_2)^t \overline{\overline{Z}}_{22}^{-1} \bar{\psi}_2(Q_2)$$

Eq. 3.15

L'expression de la mobilité est introduite dans l'Eq. 3.14 :

$$\overline{\overline{C}}_{12} \overline{\overline{C}}_{21} = -\frac{k^2}{\omega^2} \overline{\overline{Z}}_{11}^{-1} \bar{\psi}_1(Q_1) \bar{\psi}_1(Q_1)^t Y_2(Q_2)$$

Eq. 3.16

On remarque que la sous-matrice $\overline{\overline{C}}_{12} \overline{\overline{C}}_{21}$ est proportionnelle au produit des bases modales des systèmes découplés bloqués (ψ) (puisque la sous-matrice $\overline{\overline{Z}}_{11}$ est diagonale) :

$$\overline{\overline{C}}_{12} \overline{\overline{C}}_{21} \propto \bar{\psi}_1(Q_1) \bar{\psi}_1(Q_1)^t$$

Eq. 3.17

3.1.3. Propriétés de la valeur propre de couplage

Une propriété fondamentale qui s'attache à la valeur propre de couplage est qu'elle est mesurable. Cela vient du fait que les mobilités $Y_i(Q_i)$, ainsi que la raideur du ressort, sont des quantités accessibles par la mesure.

L'Eq. 3.9 peut aussi se mettre sous la forme suivante :

$$\lambda^\pm = \pm \sqrt{\frac{Y_1(Q_1)}{Y_c}} \sqrt{\frac{Y_2(Q_2)}{Y_c}}$$

Eq. 3.18

On reconnaît en $Y_c = j\omega/k$ l'expression de la mobilité du ressort de couplage. Ainsi, la valeur propre de couplage est constituée du produit des rapports des mobilités d'entrée des systèmes découplés bloqués sur la mobilité de la liaison. Sous l'angle de l'Eq. 3.9 et d'un point de vue physique, l'expression de la valeur propre de couplage peut être explicitée comme le rapport de la moyenne géométrique des mobilités d'entrée des systèmes découplés bloqués sur la mobilité de la liaison (cf. §1.4.1).

Dans le cas où la liaison est extrêmement raide, la mobilité d'entrée des systèmes découplés bloqués tend vers la mobilité de la liaison $j\omega/k$ (cf § 1.4.1. Eq. 1.49) :

$$Y_1(Q_1) \cong Y_2(Q_2) \cong \frac{j\omega}{k} \Rightarrow \lambda^2 \cong 1$$

Eq. 3.19

Ainsi, la valeur propre de couplage tend vers 1. On retrouve les résultats trouvés au premier chapitre, c'est-à-dire que la valeur propre de couplage est représentative de la force du couplage entre les systèmes, et qu'une valeur propre égale à l'unité s'accorde à un couplage maximum.

On étudie différents cas de figures où la valeur propre de couplage est reformulée de manière à ne faire apparaître que des quantités clairement dépendantes ou indépendantes des caractéristiques du ressort de couplage, c'est-à-dire respectivement la mobilité du ressort Y_c ou de la mobilité des plaques découplées libres $\tilde{Y}_i(Q_i)$, comme cela a été fait au § 1.4. La valeur propre de couplage s'écrit :

$$\lambda = \sqrt{\frac{\tilde{Y}_1(Q_1)}{Y_c + \tilde{Y}_1(Q_1)}} \sqrt{\frac{\tilde{Y}_2(Q_2)}{Y_c + \tilde{Y}_2(Q_2)}}$$

Eq. 3.20

• Si la mobilité du ressort est très supérieure à celle des plaques découplées libres, ce qui peut se produire pour une raideur de couplage très faible, alors la valeur propre de couplage prend la forme :

$$Y_c \gg \tilde{Y}_i(Q_i) \Rightarrow \lambda \cong \pm \sqrt{\frac{\tilde{Y}_1(Q_1)\tilde{Y}_2(Q_2)}{Y_c^2}} \ll 1$$

Eq. 3.21

La valeur propre de couplage est très inférieure à un : elle tend vers zéro.

• Si la mobilité du ressort est très inférieure à celle des plaques découplées libres, ce qui peut se produire pour une raideur de couplage très forte, alors la valeur propre de couplage prend la forme :

$$Y_c \ll \tilde{Y}_i(Q_i) \Rightarrow \lambda \cong \pm 1$$

Eq. 3.22

La valeur propre de couplage est de l'ordre de un.

• Si les mobilités des plaques découplées libres sont telles que la mobilité du ressort est comprises entre elles :

$$\tilde{Y}_1(Q_1) \ll Y_c \ll \tilde{Y}_2(Q_2) \Rightarrow \lambda \cong \pm \sqrt{\frac{\tilde{Y}_1(Q_1)}{Y_c}} > 1$$

$$\tilde{Y}_2(Q_2) \ll Y_c \ll \tilde{Y}_1(Q_1) \Rightarrow \lambda \cong \pm \sqrt{\frac{\tilde{Y}_2(Q_2)}{Y_c}} > 1$$

3.1.4. Résultats numériques

Bien qu'une étude paramétrique soit effectuée au paragraphe suivant, quelques exemples de résultats de calcul de la valeur propre de couplage sont maintenant présentés pour donner une idée de leur allure. Celle-ci est calculée avec les valeurs numériques données en Annexe 3.

La Figure 3.2 montre la valeur propre de couplage au carré en fonction de la fréquence. (On représente la valeur propre au carré pour s'affranchir des inévitables choix de racines complexes). On remarque trois zones :

- En dessous de 30 Hz, on se trouve en dessous des premiers modes de vibration des plaques découplées bloquées : le comportement est assimilable à la déformée statique. On constate que la valeur propre de couplage est complètement stable en fonction la fréquence puisqu'en dessous de la fréquence des premiers modes des plaques. On pourrait définir cette zone comme le domaine des très basses fréquences. Quelle que soit la raideur du ressort de couplage, la valeur propre de couplage est comprise entre zéro et un dans cette zone. C'est d'ailleurs un indicateur de force de couplage. Plus le module de la valeur propre de couplage approche un dans cette zone, plus le couplage aura tendance à être fort, plus elle approche de zéro, plus il sera faible. La Figure 3.5 présentée plus loin, montre trois valeurs propres de couplage pour trois raideurs différentes et corrobore l'assertion qui vient d'être énoncée. La plus forte des raideurs induit une valeur propre de couplage proche de 1 (donc 0 dB).

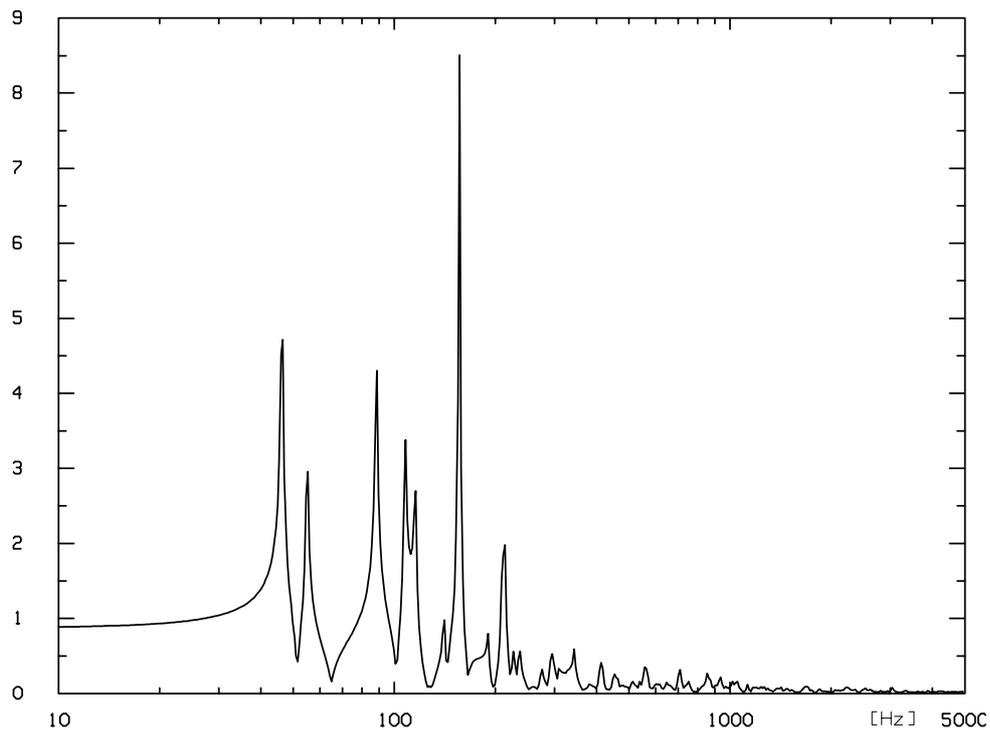
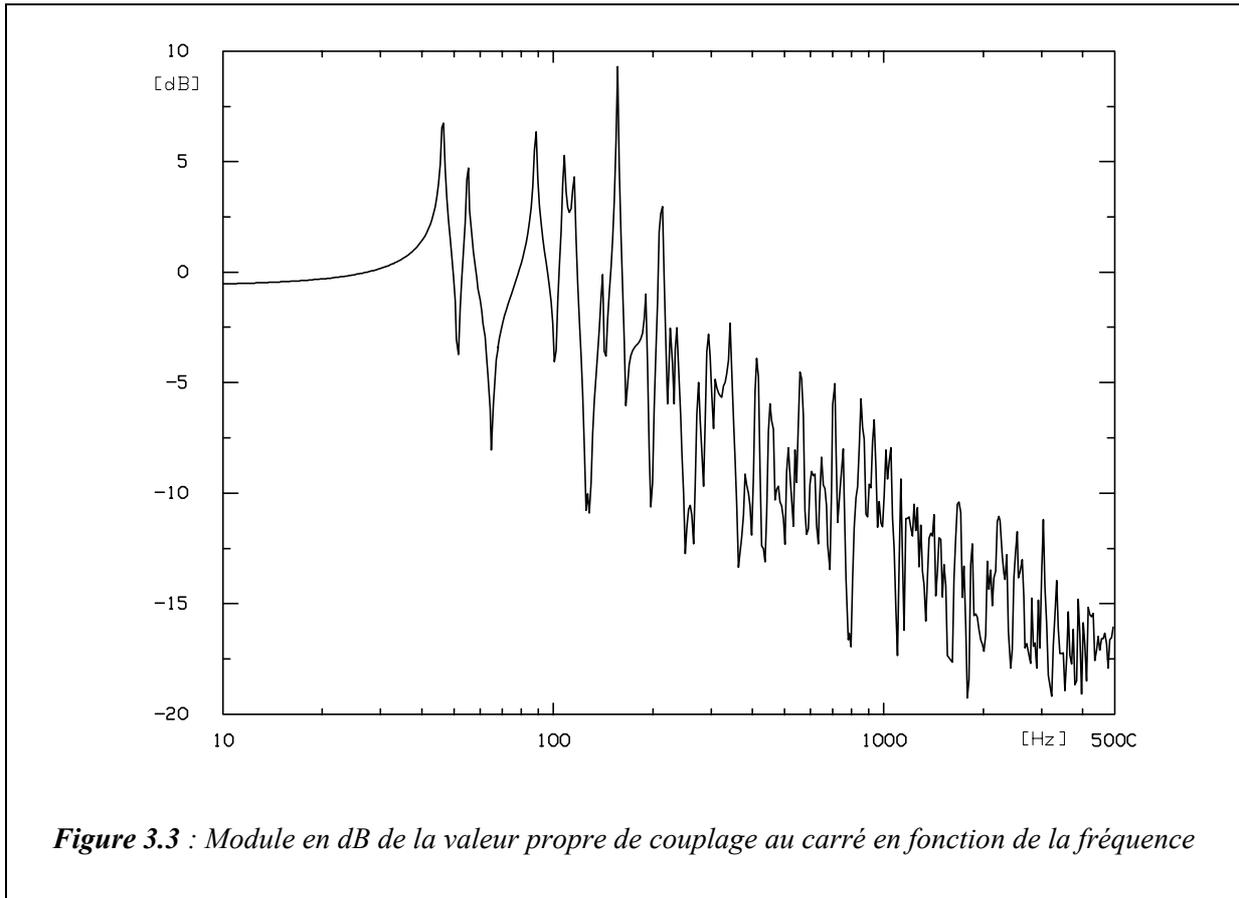


Figure 3.2 : Module de la valeur propre de couplage au carré en fonction de la fréquence

- Au delà de 300 Hz, on observe une multitude de pics de faible intensité (par rapport à la zone 30 - 300 Hz). Aux plus hautes fréquences, la valeur propre de couplage tend vers zéro. Or, on sait que dans cette zone fréquentielle, le comportement de la mobilité du ressort est dominant (comme si le ressort devenait “mou”) ; il ne transmet pas bien l’information d’une plaque à l’autre. Cela apporte encore une confirmation au fait que la valeur propre de couplage est représentative de la force du couplage.

- Le domaine qui couvre 30 - 300 Hz présente des pics très marqués. Ils correspondent aux premiers modes de résonance de la mobilité des plaques découplées bloquées et donc cela explique tout à fait l’intense activité de la valeur propre de couplage. Dans cette zone, le couplage peut aussi bien être fort que faible (ce n’est pas la hauteur des pics qui représente la force du couplage).

La Figure 3.3 est identique à la Figure 3.2 mais la représentation en amplitude est en dB. Par rapport à la Figure 3.2 qui semblait indiquer un affaiblissement du comportement modal au delà de 1000 Hz, la Figure 3.3 montre que les modes de vibrations existent bien dans cette zone et le recouvrement modal est de plus en plus important à mesure que la fréquence augmente. Cette représentation montre mieux quand la valeur propre de couplage stationne aux environs de 0 dB, signe du couplage fort. On observe facilement que cette zone s'étend ici de 30 à 300 dB.



3.2. DETERMINATION DU VECTEUR PROPRE DE COUPLAGE

3.2.1. Expression analytique du vecteur propre de couplage

Les vecteurs propres de couplage associés à la matrice de couplage s'obtiennent en partant des équations issues de la relation fondamentale des quantités propres, déjà vue dans le chapitre 2 :

$$\left[\overline{\overline{C_{12}C_{21}}} - \lambda^2 \overline{\overline{I}} \right] \vec{\varphi}_1 = \vec{0}$$

Eq. 3.23

Le remplacement dans cette équation des expressions de la sous-matrice $\overline{\overline{C_{12}C_{21}}}$ et de la valeur propre de couplage au carré, données par les Eq. 3.16 et Eq. 3.8, mène à l'expression suivante :

$$-\frac{k^2}{\omega^2} \overline{\overline{Z_{11}}}^{-1} \vec{\psi}_1(Q_1) \vec{\psi}_1(Q_1)^t Y_2(Q_2) \vec{\varphi}_1 = -\frac{k^2}{\omega^2} Y_1(Q_1) Y_2(Q_2) \vec{\varphi}_1$$

Eq. 3.24

La simplification par k^2/ω^2 et par $Y_2(Q_2)$ conduit à :

$$\overline{\overline{Z_{11}}}^{-1} \vec{\psi}_1(Q_1) \vec{\psi}_1(Q_1)^t \vec{\varphi}_1 = Y_1(Q_1) \vec{\varphi}_1$$

Eq. 3.25

On s'aperçoit que si dans le terme de gauche on cherche à faire apparaître l'expression (Eq. 3.15) de la mobilité au point de couplage, $Y_1(Q_1)$, pour la simplifier avec celle de droite et faire apparaître le vecteur propre de couplage $\vec{\varphi}_1$, il faut remplacer l'expression du vecteur propre par :

$$\vec{\varphi}_1 = \overline{\overline{Z_{11}}}^{-1} \vec{\psi}_1(Q_1)$$

Eq. 3.26

Dans ce cas, on obtient finalement cette même expression pour le vecteur propre de couplage.

L'autre partie du vecteur propre de couplage, $\vec{\varphi}_2$, s'obtient simplement par application de la relation fondamentale des quantités propres : $\overline{\overline{C_{21}}} \vec{\varphi}_1 = \lambda \vec{\varphi}_2$.

Pour des raisons de symétrie de notations, et puisque les vecteurs propres peuvent être définis à une constante près, on choisit de définir les vecteurs propres de couplage comme ayant les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}_2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{Y_1(Q_1)}} \bar{Z}_{11}^{-1} \bar{\psi}_1(Q_1) \\ \frac{1}{\sqrt{Y_2(Q_2)}} \bar{Z}_{22}^{-1} \bar{\psi}_2(Q_2) \end{cases}$$

Eq. 3.27

En d'autres termes, la $m^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\bar{\varphi}_1$ est :

$$(\varphi_1)_m = \frac{1}{\sqrt{Y_1(Q_1)}} \frac{\psi_{1m}(Q_1)}{Z_{11m}}$$

Eq. 3.28

Alors que la $n^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\bar{\varphi}_2$ est :

$$(\varphi_2)_n = \frac{1}{\sqrt{Y_2(Q_2)}} \frac{\psi_{2n}(Q_2)}{Z_{22n}}$$

Eq. 3.29

La partie du vecteur propre de couplage $\bar{\varphi}_1$ associée à la plaque 1 s'interprète comme le vecteur des amplitudes modales décrivant le champ de vitesse de la plaque i découplée bloquée quand une force d'amplitude $1/\sqrt{Y_i(Q_i)}$ est appliquée au point de couplage Q_i .

De la même manière que l'on associe la vitesse en un point à partir du vecteur des amplitudes modales de la vitesse et de la base modale en ce point (cf. Eq. 2.2), on établit la valeur (scalaire) du vecteur propre de couplage en un point courant M de la plaque i à partir des composantes du vecteur propre de couplage et de la base modale au point M :

$$\varphi_i(M) = \bar{\psi}_i(M)^t \bar{\varphi}_i$$

Eq. 3.30

Son expression développée donne :

$$\varphi_i(M) = \bar{\psi}_i(M)^t \frac{1}{\sqrt{Y_i(Q_i)}} \bar{Z}_{ii}^{-1} \bar{\psi}_i(Q_i) = \frac{Y_i(Q_i, M)}{\sqrt{Y_i(Q_i)}}$$

Eq. 3.31

Où $Y_i(Q_i, M)$, la mobilité de transfert entre le point Q_i et le point courant M se définit par l'expression suivante¹ :

$$Y_i(Q_i, M) = \bar{\psi}_i(M)^t \bar{Z}_{ii}^{-1} \bar{\psi}_i(Q_i) = \bar{\psi}_i(Q_i)^t \bar{Z}_{ii}^{-1} \bar{\psi}_i(M) = Y_i(M, Q_i)$$

Eq. 3.32

¹ Expression qui montre aussi une propriété de réciprocité.

La même démarche conduit à la valeur scalaire associée au vecteur propre de couplage considéré au point de connexion Q_i de la liaison sur la plaque i :

$$\varphi_i(Q_i) = \bar{\psi}_i(Q_i)^t \frac{1}{\sqrt{Y_i(Q_i)}} \bar{Z}_{ii}^{-1} \bar{\psi}_i(Q_i) = \frac{Y_i(Q_i)}{\sqrt{Y_i(Q_i)}} = \sqrt{Y_i(Q_i)}$$

Eq. 3.33

On retrouve une expression sensiblement identique à l'expression du vecteur propre de couplage du chapitre 1. La différence vient de ce que pour un système multimodal, l'expression de l'Eq. 3.33 du vecteur propre de couplage n'est vrai qu'au point de couplage².

Les deux parties du vecteur propre de couplage ne sont pas définies sur le même domaine et donc ne sont pas orthogonales entre elles. Cela ne les empêche en rien de former une base de solution sur laquelle on projetera les vecteurs vitesses des plaques.

3.2.2. Calcul numérique du vecteur propre de couplage

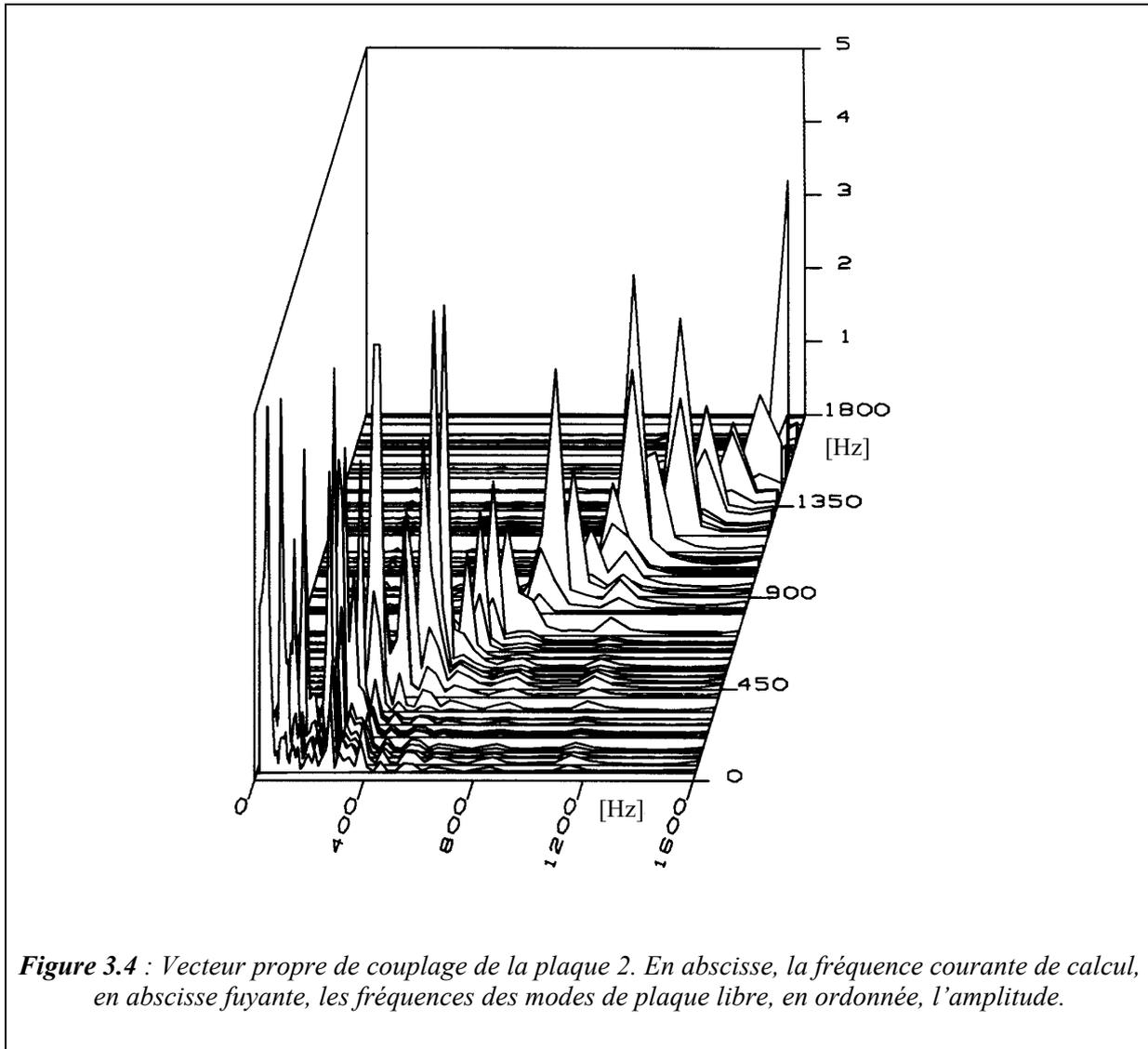
Le code de calcul BNM est utilisé pour obtenir le vecteur propre de couplage. Ce programme informatique diffère légèrement du calcul analytique qui a été présenté jusqu'à maintenant dans la mesure où la base modale utilisée est toujours celle des plaques découplées libres, c'est-à-dire la base (ϕ) . Par conséquent, on ne manipule que des sous-matrices \bar{Z}_{ii} qui ne sont pas diagonales ce qui oblige à effectuer des inversions de matrices (au lieu de simples divisions). Néanmoins, ces inversions sont numériquement moins lourdes que la recherche des bases modales des plaques découplées bloquées.

La Figure 3.4 représente un des deux vecteurs propres calculé à partir des valeurs numériques données en Annexe 4. La fréquence de calcul est portée en abscisse, la fréquence des modes propres de vibration découplés libres en abscisse fuyante, et le module de l'amplitude du vecteur propre de couplage en ordonnée. Deux tendances principales apparaissent :

- Tout d'abord, aux plus hautes fréquences (au-delà de 800 Hz), on constate une réponse importante des modes ayant leur fréquence de résonance à proximité de la fréquence courante. Or la Figure 3.2 représentant la valeur propre de couplage, montre que le couplage est faible dans cette gamme de fréquences ; quand le couplage est faible, les bases modales des plaques découplées libres ou découplées bloquées sont très semblables. La transmission entre les deux plaques est contrôlée par les modes résonants des plaques découplées libres.

² Dans un système à un degré de liberté, quel que soit l'endroit considéré sur la masse, le vecteur propre de couplage est par définition identique, du point de vue du mouvement, à sa valeur au point de connexion.

- Dans les fréquences plus basses (en dessous de 800 Hz), le caractère résonant est conservé, mais beaucoup d'autres modes résonent. Dans cette zone de fréquence, l'intensité de la valeur propre de couplage prouve un couplage fort : les bases modales découplées bloquées et découplées libres sont bien différenciées. Cette différence s'exprime précisément par ces contribution hors résonance.



3.3. ANALYSE PARAMETRIQUE

3.3.1. Influence de la raideur du ressort de couplage sur la valeur propre de couplage

Dans un premier temps, on étudie le cas de la valeur propre de couplage associée à deux plaques infinies lorsque la raideur du ressort de couplage varie. L'expression de la valeur propre de couplage est reformulée de manière à faire apparaître les mobilités des plaques infinies découplées libres qui sont :

$$\tilde{Y}_i = \frac{1}{8\sqrt{D\rho h_i}} = \frac{1}{8\sqrt{\frac{E\rho h_i^4}{12}}}$$

Eq. 3.34

E est le module d'Young, ρ la masse volumique et h_i l'épaisseur de la plaque i .

En exprimant la mobilité des plaques découplées bloquées à partir des mobilités des plaques infinies libres, on obtient l'expression de la valeur propre de couplage suivante :

$$\lambda = \sqrt{\frac{\tilde{Y}_1 \tilde{Y}_2}{(\tilde{Y}_1 + Y_c)(\tilde{Y}_2 + Y_c)}}$$

Eq. 3.35

La Figure 3.5 montre cette expression de la valeur propre de couplage pour trois raideurs du ressort de couplage, 10^8 , 10^6 et 10^4 N.m^{-1} .

Les mobilités des plaques infinies étant des constantes, on peut définir deux zones fréquentielles par rapport à la mobilité du ressort Y_c :

- $Y_c \ll \tilde{Y}_1$ et $Y_c \ll \tilde{Y}_2$ Dans ce cas, la valeur propre de couplage vaut un. Il arrive que ces conditions ne soient pas atteintes quand la raideur du ressort de couplage est faible, (cf. Figure 3.5, courbe (.....) $k=10^4 \text{ N.m}^{-1}$).

- $Y_c \gg \tilde{Y}_1$ et $Y_c \gg \tilde{Y}_2$ Dans ce cas, la valeur propre de couplage vaut $\lambda = \frac{k}{j\omega} \sqrt{\tilde{Y}_1 \tilde{Y}_2}$.

Elle est alors directement proportionnelle à l'inverse de la mobilité du ressort, $k/j\omega$. La condition entre la mobilité du ressort et la mobilité des plaques est atteinte plus ou moins haut en fréquence selon les caractéristiques des systèmes ; cependant, on finit toujours par observer une courbe décroissante proportionnelle à $k/j\omega$.

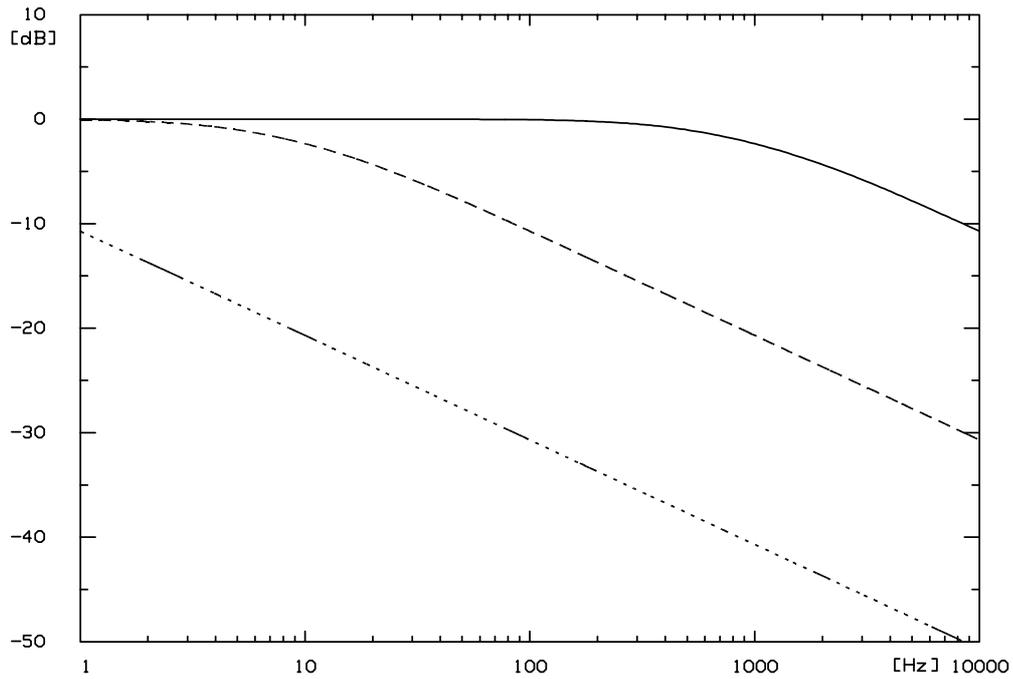


Figure 3.5 : Module de la valeur propre de couplage au carré en fonction de la fréquence pour 3 valeurs de la raideur du ressort de couplage 10^8 N.m^{-1} (—) ; 10^6 N.m^{-1} (- - -) 10^4 N.m^{-1} (.....)
Les plaques sont infinies

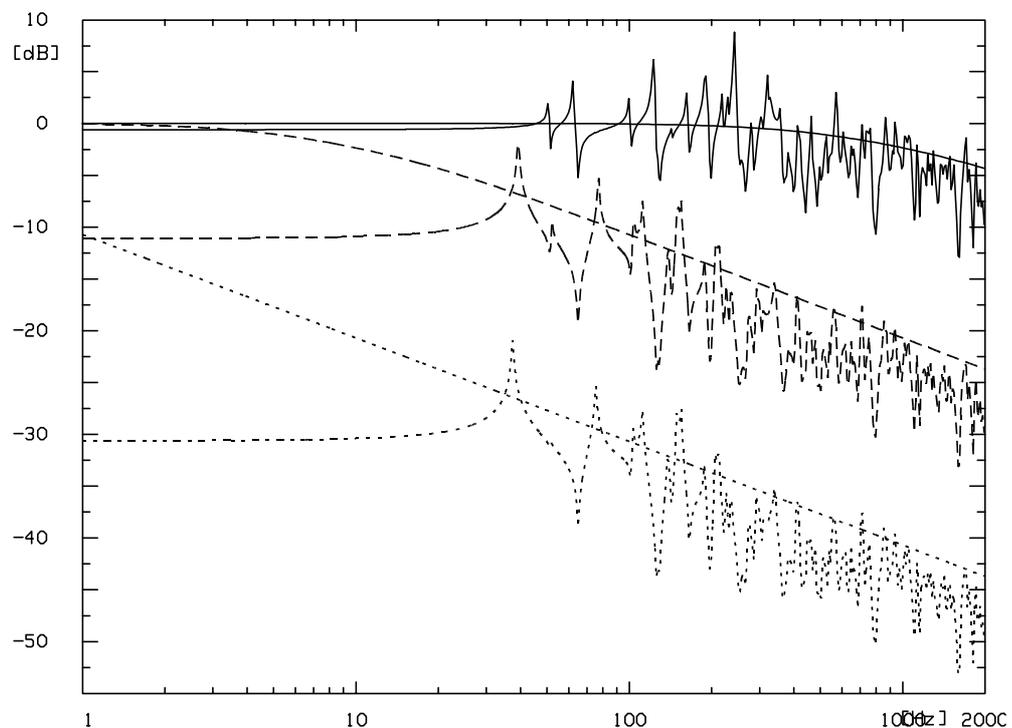


Figure 3.6 : Comparaison des modules de la valeur propre de couplage au carré (plaques finies et infinies) en fonction de la fréquence pour 3 valeurs de la raideur du ressort de couplage : 10^8 N.m^{-1} (—) ; 10^6 N.m^{-1} (- - -) 10^4 N.m^{-1} (.....)

La Figure 3.6 montre que les pentes obtenues dans le cas des plaques infinies et des plaques finies sont identiques. On observe bien pour un forte raideur du ressort de couplage (10^8 N.m^{-1}) l'horizontalité de la réponse, signe que la mobilité du ressort de couplage est très inférieure à celles des plaques.

En outre, la figure montre que pour des couplages (très ou assez) faibles, c'est-à-dire pour les valeurs de la raideur de 10^4 et 10^6 N.m^{-1} , on observe un changement de niveau de la valeur propre de couplage mais les pics et les creux restent pratiquement aux mêmes fréquences. On pourrait superposer les deux courbes. En effet, le couplage n'est pas assez fort pour avoir un effet observable sur les mobilités d'entrée des plaques découplées bloquées. Les valeurs d'impédance issues de la plaque simplement appuyée mais libre, sont largement dominants par rapport à la contribution de la liaison. L'Eq. 3.9 est, dans cette zone de raideur, quasiment linéaire vis-à-vis de la raideur et donc la valeur propre de couplage aussi. L'expression de la valeur propre de couplage au carré est proportionnelle à la raideur de la liaison et si l'on augmente la raideur d'un facteur 100, le module de la valeur propre de couplage augmente (logiquement) de 20 dB.

La même figure montre que lorsque la raideur passe dans une zone où elle est considérée comme forte, $k = 10^8 \text{ N.m}^{-1}$, le module de la valeur propre de couplage augmente encore mais tend vers un seuil (cf. Figure 3.5 où la décroissance en $k/j\omega$ intervient de plus en plus haut en fréquence). En outre, on observe que la forme de la réponse fréquentielle est complètement modifiée. Ceci est dû à l'influence de la raideur de la liaison sur la mobilité d'entrée des plaques découplées bloquées. L'impédance associée à la liaison concurrence fortement celle de la plaque libre, et donc, on observe une modification importante des modes de vibration et une remontée des résonances.

Quand la raideur se fait très forte, la réponse de la valeur propre de couplage présente des pics qui peuvent ponctuellement atteindre des valeurs très importantes mais on a vu au chapitre 1 que la force de couplage est maximum quand $\lambda=1$; or, la réponse de la valeur propre de couplage reste aux alentours de un sur une plage fréquentielle de plus en plus longue (jusqu'à ce que la condition $Y_c \gg \tilde{Y}_1$ et $Y_c \gg \tilde{Y}_2$ soit atteinte). Donc le couplage est fort sur une longue plage fréquentielle.

3.3.2. Influence de l'amortissement structural sur la valeur propre de couplage

L'amortissement structural est pris en compte dans les deux plaques par l'intermédiaire d'un module d'Young complexe. Les facteurs de pertes internes η_1 et η_2 des deux plaques ont une influence sur la valeur propre de couplage décrite en Figure 3.7. Elle montre la représentation de la valeur propre de couplage en fonction de la fréquence, pour trois valeurs d'amortissement structural, respectivement 1%, 5% et 10%.

L'amortissement structural agit bien sûr au niveau des termes de mobilité d'entrée des plaques découplées bloquées $Y_i(C_i)$. Son effet est de lisser les pics et les creux. La Figure 3.7 montre que plus l'amortissement est grand, moins les pics sont élevés et moins les creux sont profonds. La valeur propre de couplage étant représentative de la force de couplage, là où la force de couplage était faible (resp. forte), elle peut selon l'amortissement soit augmenter soit diminuer.

On constate qu'un fort amortissement lisse les courbes, ce qui s'interprète grâce à l'expression de la valeur propre de couplage. L'amortissement a tendance à lisser la réponse des systèmes vibrants, donc la mobilité d'entrée des plaques découplées bloquées, et donc la valeur propre de couplage.

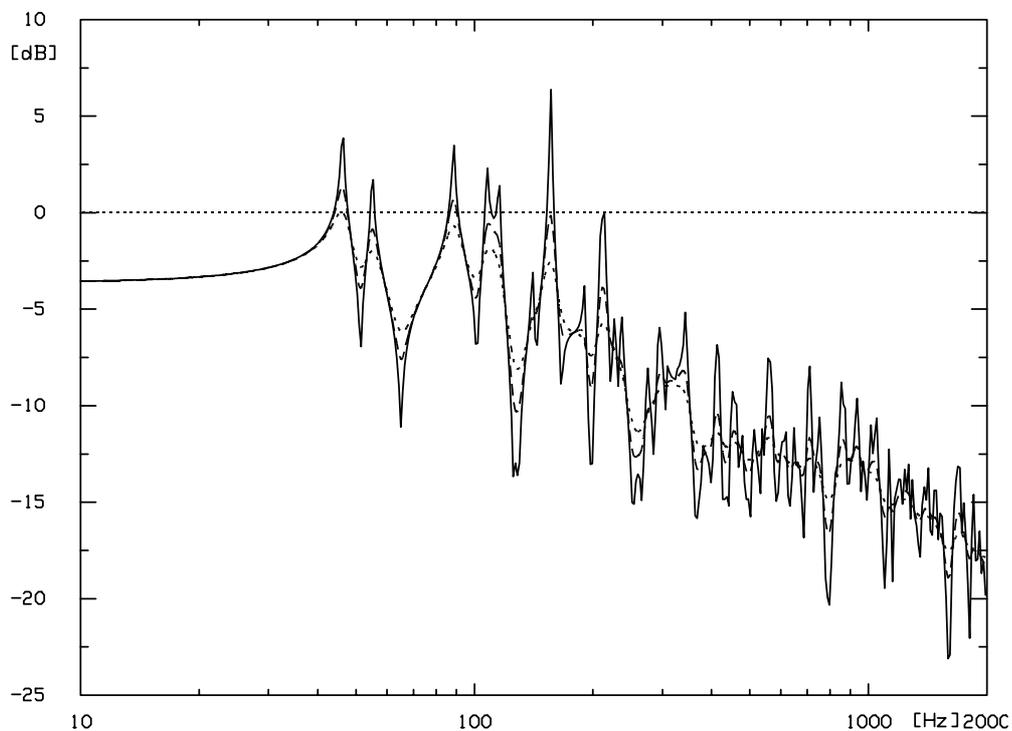


Figure 3.7 : Module en dB de la valeur propre de couplage au carré en fonction de la fréquence pour 3 valeurs de l'amortissement structural 1% (—) ; 5% (- - -) ; 10% (.....)

Dans l'exemple présenté, la valeur propre de couplage ne dépasse jamais 1 lorsque $\eta=10\%$.

3.4. RESOLUTION ANALYTIQUE

3.4.1. Projection des vecteurs vitesse sur le vecteur propre de couplage

On se propose d'écrire la solution du problème des deux plaques couplées par un ressort en utilisant les valeurs propres et les vecteurs propres de couplage, en suivant la même démarche qu'au premier chapitre.

On exprime le vecteur vitesse sous la forme d'un vecteur faisant intervenir les deux vecteurs $\vec{\varphi}_1$ et $\vec{\varphi}_2$ composants le vecteur propre de couplage et un vecteur résidu, élément de l'espace complémentaire à l'espace engendré par le vecteur propre de couplage :

$$\begin{Bmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \vec{\varphi}_1 \\ \alpha_2 \vec{\varphi}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{R}_2 \end{Bmatrix}$$

Eq. 3.36

De la même manière, on décompose le vecteur vitesse des systèmes découplés bloqués :

$$\begin{Bmatrix} \vec{w}_{o1} \\ \vec{w}_{o2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_{o1} \vec{\varphi}_1 \\ \alpha_{o2} \vec{\varphi}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \vec{R}_{o1} \\ \vec{R}_{o2} \end{Bmatrix}$$

Eq. 3.37

L'Eq. 3.36 est multipliée par la matrice de couplage $\overline{\overline{C}}$. Compte tenu du fait que cette matrice n'admet qu'une seule valeur propre de couplage, on obtient :

$$\overline{\overline{C}} \begin{Bmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \alpha_2 \vec{\varphi}_1 \\ \alpha_1 \vec{\varphi}_2 \end{Bmatrix}$$

Eq. 3.38

En effet, du fait de leur définition, les résidus sont associés au noyau de l'application définie par la matrice de couplage et donc $\overline{\overline{C}} \begin{Bmatrix} \vec{R} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \end{Bmatrix}$. Le même calcul conduit au résultat suivant pour les vitesses des systèmes découplés bloqués :

$$\overline{\overline{C}} \begin{Bmatrix} \vec{w}_{o1} \\ \vec{w}_{o2} \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \alpha_{o2} \vec{\varphi}_1 \\ \alpha_{o1} \vec{\varphi}_2 \end{Bmatrix}$$

Eq. 3.39

L'équation du couplage, telle qu'elle a été définie dans le chapitre 2 à l'occasion de la définition de la matrice de couplage, donne la relation suivante entre les différents vecteurs vitesse et la matrice de couplage :

$$\begin{Bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{w}_{o1} \\ \bar{w}_{o2} \end{Bmatrix} + \overline{\overline{C}} \begin{Bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \end{Bmatrix}$$

Eq. 3.40

Cette relation signifie que la vitesse de la plaque 1, par exemple, est égale à la vitesse de cette même plaque quand elle découplée bloquée, plus la participation de la vitesse de la plaque 2, couplée, par l'intermédiaire du ressort de couplage (et réciproquement). L'Eq. 3.40 fait apparaître une quantité $\overline{\overline{C}}\{\bar{w}\}$ qui vient d'être définie en Eq. 3.38. Son remplacement mène à l'équation fondamentale de la méthode des valeurs propres de couplage :

$$\begin{Bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{w}_{o1} \\ \bar{w}_{o2} \end{Bmatrix} + \lambda \begin{Bmatrix} \alpha_2 \bar{\phi}_1 \\ \alpha_1 \bar{\phi}_2 \end{Bmatrix}$$

Eq. 3.41

Par cette équation, le vecteur vitesse des deux plaques quand celles-ci sont couplées, peut être déterminé par l'intermédiaire de la vitesse des systèmes découplés bloqués, et par la connaissance des vecteurs propres de couplage, indicateurs des chemins modaux de transmission, de la valeur propre de couplage associée à la force de couplage, et de coefficients nommés "coefficients propres" α_i qui sont maintenant explicités.

3.4.2. Détermination des coefficients propres

3.4.2.1. Coefficients propres des systèmes couplés

Les coefficients propres α_1 et α_2 sont extraits en appliquant la matrice de couplage à l'équation du couplage Eq. 3.40 et en utilisant les propriétés de l'Eq. 3.38 et de l'Eq. 3.39 :

$$\overline{\overline{C}} \left(\begin{Bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \end{Bmatrix} - \overline{\overline{C}} \begin{Bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{w}_{o1} \\ \bar{w}_{o2} \end{Bmatrix} \right)$$

Eq. 3.42

La propriété de permutation des coefficients propres s'applique une deuxième fois sur le terme $\overline{\overline{C}}^2 \bar{w}$, et les quantités propres de couplage apparaissent alors sous la forme :

$$\lambda \begin{Bmatrix} \alpha_2 \bar{\phi}_1 \\ \alpha_1 \bar{\phi}_2 \end{Bmatrix} - \lambda^2 \begin{Bmatrix} \alpha_1 \bar{\phi}_1 \\ \alpha_2 \bar{\phi}_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \alpha_{o2} \bar{\phi}_1 \\ \alpha_{o1} \bar{\phi}_2 \end{Bmatrix}$$

Eq. 3.43

L'égalité sur les vecteurs propres et la simplification par λ permettent d'écrire un système d'équations linéaires avec les coefficients propres et la valeur propre de couplage :

$$\begin{cases} \alpha_2 - \lambda\alpha_1 = \alpha_{o2} \\ \alpha_1 - \lambda\alpha_2 = \alpha_{o1} \end{cases}$$

Eq. 3.44

Ce qui conduit à :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{\alpha_{o1} + \lambda\alpha_{o2}}{1 - \lambda^2} \\ \alpha_2 = \frac{\alpha_{o2} + \lambda\alpha_{o1}}{1 - \lambda^2} \end{cases}$$

Eq. 3.45

La recherche des coefficients propres des systèmes couplés α_i passe par la connaissance des coefficients propres des systèmes découplés bloqués α_{oi} .

3.4.2.2. Coefficients propres des systèmes découplés bloqués

On part de l'expression Eq. 3.16 des sous-matrices de la matrice de couplage au carré et l'on remplace $-k^2 Y_2(Q_2)/\omega^2$ par $\lambda^2/Y_1(Q_1)$, conformément à l'expression de la valeur propre de couplage (cf. Eq. 3.8). On obtient alors :

$$\overline{\overline{C_{12}C_{21}}} = \frac{\lambda^2}{Y_1(Q_1)} \overline{\overline{Z_{11}}}^{-1} \overline{\overline{\psi_1}}(Q_1) \overline{\overline{\psi_1}}(Q_1)^t$$

Eq. 3.46

Dans cette équation, l'expression développée du vecteur propre $\overline{\overline{\phi_1}}$ tel qu'il a été défini en Eq. 3.27 est reconnaissable. Son remplacement permet de redéfinir l'expression de la sous-matrice de couplage au carré en fonction du vecteur propre de couplage :

$$\overline{\overline{C_{12}C_{21}}} = \frac{\lambda^2}{\sqrt{Y_1(C_1)}} \overline{\overline{\phi_1}} \overline{\overline{\psi_1}}(C_1)^t$$

Eq. 3.47

De manière à faire apparaître une expression rassemblant la sous-matrice de couplage au carré et les coefficients propres α_{oi} , on applique la matrice de couplage à l'Eq. 3.39 :

$$\begin{bmatrix} \overline{\overline{C_{12}C_{21}}} & \overline{\overline{0}} \\ \overline{\overline{0}} & \overline{\overline{C_{21}C_{12}}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{\overline{w_{o1}}} \\ \overline{\overline{w_{o2}}} \end{Bmatrix} = \lambda^2 \begin{Bmatrix} \alpha_{o1} \overline{\overline{\phi_1}} \\ \alpha_{o2} \overline{\overline{\phi_2}} \end{Bmatrix}$$

Eq. 3.48

Ainsi, résoudre la première équation du système de l'Eq. 3.48 avec l'Eq. 3.47 permet de donner l'expression du coefficient propre des systèmes découplés bloqués :

$$\frac{\lambda^2}{\sqrt{Y_1(Q_1)}} \bar{\varphi}_1 \bar{\psi}_1(Q_1)^t \bar{w}_{o1} = \lambda^2 \alpha_{o1} \bar{\varphi}_1$$

Eq. 3.49

On élimine la valeur propre de couplage au carré et l'on remarque l'apparition de la vitesse de la plaque 1 découplée bloquée considérée au point C_1 (cf. Eq. 2.2). Ainsi, l'Eq. 3.49 s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{Y_1(Q_1)}} \bar{\varphi}_1 w_{o1}(Q_1) = \alpha_{o1} \bar{\varphi}_1$$

Eq. 3.50

Finalement, les coefficients des systèmes découplés bloqués valent :

$$\alpha_{o1} = \frac{w_{o1}(Q_1)}{\sqrt{Y_1(Q_1)}}$$

Eq. 3.51

$$\alpha_{o2} = \frac{w_{o2}(Q_2)}{\sqrt{Y_2(Q_2)}}$$

Eq. 3.52

Il est intéressant de noter que si seule une des deux plaques est soumise à une excitation extérieure, alors, par l'intermédiaire de la vitesse découplée bloquée, le coefficient propre associé α_{oi} est nul.

Remarque

L'Eq. 3.37 suggère que le vecteur résidu peut parfois être nul. Si l'on cherche la vitesse au point de couplage Q_i , on a l'équation suivante :

$$\bar{\psi}_i^t(Q_i) \bar{w}_{oi} = \bar{\psi}_i^t(Q_i) \bar{R}_{oi} + \alpha_{oi} \bar{\psi}_i^t(Q_i) \bar{\varphi}_i$$

Eq. 3.53

Remplacer α_{oi} et $\bar{\varphi}_i$ par leur expression respective donne :

$$\bar{\psi}_i^t(Q_i) \bar{R}_{oi} = \bar{\psi}_i^t(Q_i) \bar{w}_{oi} - \frac{\bar{\psi}_i^t(Q_i) \bar{w}_{oi}}{\sqrt{Y_i(Q_i)}} \bar{\psi}_i^t(Q_i) \frac{1}{\sqrt{Y_i(Q_i)}} \bar{Z}_{ii}^{-1} \bar{\psi}_i(Q_i) = 0$$

Eq. 3.54

Ce qui exprime la valeur scalaire du vecteur résidu quand il est considéré au point de connexion Q_i :

$$R_{oi}(Q_i) = 0$$

Eq. 3.55

Au point de couplage, la vitesse correspondant au vecteur des amplitudes modales du résidu R_o est nulle. Cela signifie qu'en ce point, la vitesse des systèmes découplés bloqués est dans la même direction que le vecteur propre de couplage.

On considère la vitesse des systèmes bloqués au point de couplage. Elle s'exprime par les deux expressions des Eq. 3.36 et Eq. 3.41. En se servant du fait que la résultante du vecteur résidu est nul en ce point, il vient :

$$\begin{Bmatrix} \alpha_{o1} \bar{\psi}_1^t(Q_1) \bar{\phi}_1 \\ \alpha_{o2} \bar{\psi}_2^t(Q_2) \bar{\phi}_2 \end{Bmatrix} + \lambda \begin{Bmatrix} \alpha_2 \bar{\psi}_1^t(Q_1) \bar{\phi}_1 \\ \alpha_1 \bar{\psi}_2^t(Q_2) \bar{\phi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\psi}_1^t(Q_1) \bar{R}_1 \\ \bar{\psi}_2^t(Q_2) \bar{R}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_1 \bar{\psi}_1^t(Q_1) \bar{\phi}_1 \\ \alpha_2 \bar{\psi}_2^t(Q_2) \bar{\phi}_2 \end{Bmatrix}$$

Eq. 3.56

En mettant les vecteurs propres de couplage au point Q_i en facteur :

$$\begin{Bmatrix} \bar{\psi}_1^t(Q_1) \bar{R}_1 \\ \bar{\psi}_2^t(Q_2) \bar{R}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\alpha_{o1} + \lambda \alpha_2 - \alpha_1) \bar{\psi}_1^t(Q_1) \bar{\phi}_1 \\ (\alpha_{o2} + \lambda \alpha_1 - \alpha_2) \bar{\psi}_2^t(Q_2) \bar{\phi}_2 \end{Bmatrix} = 0$$

Eq. 3.57

Le remplacement des α_i par leur expression de l'Eq. 3.45 mène au résultat que la parenthèse est nulle et donc la valeur du vecteur résidu est nulle quand il est considéré au point de couplage³ :

$$\begin{cases} R_1(Q_1) = 0 \\ R_2(Q_2) = 0 \end{cases}$$

Eq. 3.58

La direction du vecteur vitesse des systèmes couplés considéré au point de connexion est donc dans la même direction que le vecteur propre. Le vecteur vitesse est proportionnel à $\sqrt{Y(Q)}$ en ce point (cf. Eq. 3.33).

3.4.3. Interprétation

Revenons sur l'Eq. 3.41 et sur son développement à partir des coefficients propres. On remplace dans cette équation, les expressions des coefficients propres des systèmes couplés, α_i , par ceux des systèmes découplés bloqués, α_{oi} :

³ Notons la similarité des résultats obtenus au point de couplage Q_i et au premier chapitre. En effet, dans les deux cas, le résidu est nul et la valeur du vecteur propre de couplage au point Q_i est égal à la racine de la mobilité en ce point. Il est vrai que dans le cas du couplage de deux oscillateurs, la notion de point d'application n'existe pas : tous les points de la masse de l'oscillateur sont à la même vitesse.

$$\begin{Bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{w}_{o1} \\ \bar{w}_{o2} \end{Bmatrix} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \begin{Bmatrix} \alpha_{o2} \bar{\varphi}_1 \\ \alpha_{o1} \bar{\varphi}_2 \end{Bmatrix} + \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} \begin{Bmatrix} \alpha_{o1} \bar{\varphi}_1 \\ \alpha_{o2} \bar{\varphi}_2 \end{Bmatrix}$$

Eq. 3.59

Il faut garder en mémoire que les coefficients α_{oi} dépendent de la vitesse des systèmes découplés bloqués considérés au point de couplage $w_o(Q_i)$ (cf. Eq. 3.51 et Eq. 3.52). On observe la vitesse de la plaque 1 dans l'Eq. 3.59 en faisant apparaître ces termes de vitesse :

$$\bar{w}_1 = \bar{w}_{o1} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \frac{w_{o2}(Q_2)}{\sqrt{Y_2(Q_2)}} \bar{\varphi}_1 + \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} \frac{w_{o1}(Q_1)}{\sqrt{Y_1(Q_1)}} \bar{\varphi}_1$$

Eq. 3.60

Cette expression est assez compliquée à interpréter. Cependant on peut dire, pour simplifier que la vitesse du système couplé dépend de trois composantes : sa vitesse sans le couplage, la vitesse de l'autre système découplé bloqué au point de couplage Q_2 , et la perturbation par le couplage de sa propre vitesse découplée bloquée au point de connexion Q_1 .

La méthode itérative a montré (cf. § 2.4.) que l'influence d'un système à l'autre se manifestait par une somme infinie de termes dépendant de la valeur propre de couplage à une puissance croissante. si la valeur propre de couplage est inférieure à un, alors, l'influence d'un système sur l'autre va en décroissant, mais la sommation reste infinie. Dans l'interprétation effectuée ci-dessus (et dans l'Eq. 1.33 du §1.2), on montre que trois termes suffisent à décrire l'ensemble des échanges.

L'expression de l'Eq. 3.60 est très similaire à celle exprimée par [Maidanik 1976a]. On retrouve un terme issu du système découplé en première approximation alors que la contribution du couplage est proportionnelle aux différences des réponses découplées considérées aux points de couplage.

Par ailleurs, on peut penser qu'il existe un lien direct entre les vecteurs propres de couplage et les modes hybrides tels qu'ils sont définis par [Morand 1991]. Le vecteur propre de couplage est alors la réponse à une excitation ponctuelle.

3.5. CONCLUSION

Suite à l'étude des éléments qui composent le modèle d'étude du chapitre 2, il a été possible d'écrire l'expression analytique de la matrice de couplage. Grâce aux propriétés de cette matrice, la valeur propre de couplage a pu être exprimée analytiquement. Celle-ci est d'expression sensiblement identique à celle trouvée dans le cas du couplage de deux systèmes à un degré de liberté étudié au chapitre 1. La seule différence vient de ce que les mobilités, dans le cas présent, sont considérées au point de connexion du ressort sur chaque plaque.

Le fait le plus marquant est de constater qu'un seul couplage entre les deux plaques entraîne une seule paire de valeurs propres de couplage. Il sera confirmé plus tard qu'il existe autant de valeurs propres de couplage que de liaisons entre les systèmes vibrants. La valeur propre de couplage confirme ainsi son côté "physique", déjà perçu dans le premier chapitre.

L'analyse du paramètre raideur montre que selon le rapport entre les mobilités des plaques et celle du ressort, on peut se trouver dans une zone où la valeur propre de couplage oscille sensiblement autour de 0 dB. En montant en fréquence, quand ce rapport devient petit (parce que la mobilité du ressort grandit), la valeur propre de couplage reste inférieure à 0 dB, suit globalement une pente descendante et linéaire en dB qui annonce la zone de couplage faible.

L'étude paramétrique montre bien que le couplage fort ou faible se définit par rapport à la valeur propre de couplage unité. Plus précisément, le couplage est considéré comme fort lorsque les variations de la valeur propre de couplage restent centrées autour de 0 dB et que bien sûr, le couplage est faible quand la valeur propre de couplage n'atteint jamais les 0 dB

L'étude de l'expression analytique du vecteur propre de couplage montre qu'il dépend de la base modale des plaques découplées bloquées au point de connexion du ressort sur les plaques. La représentation en 3D de ce vecteur propre fait bien apparaître les perturbations apportées par le ressort sur la base modale des plaques découplées libres. Celles-ci sont visibles surtout aux basses fréquences, là où la mobilité du ressort peut être importante par rapport à celle des plaques.

En ce qui concerne la résolution analytique, elle adopte une démarche strictement identique à celle du premier chapitre (projection des vecteurs vitesse sur le vecteur propre de couplage, détermination des coefficients propres). L'interprétation de la solution en vitesse en fonction des quantités propres montre trois termes suffisent là aussi (cf. Chapitre 1) à décrire la vitesse des systèmes couplés. Ces termes dépendent de la valeur propre de couplage, des vecteurs propres de couplage et des vitesses des systèmes découplés bloqués.

Après l'étude du simple couplage de deux systèmes à un seul mode (chapitre 1) et du simple couplage de deux systèmes multimodaux (chapitres 2 et 3), le travail s'oriente au chapitre 4 vers une généralisation du problème en traitant le cas de deux systèmes multimodaux couplés en de nombreux points.

* * *

*

CHAPITRE 4

Deux plaques couplées par N_k ressorts

CHAPITRE 4 - SOMMAIRE

4.1. CALCUL DE LA REPONSE EN VITESSE DES PLAQUES A PARTIR DES QUANTITES PROPRES DE COUPLAGE GLOBALES

4.1.1. Définition de la matrice de couplage globale

4.1.2. La configuration “isolée”

4.1.3. Propriétés de la matrice de couplage globale

4.1.4. Calcul de la réponse en vitesse des plaques

4.1.4.1. Décomposition sur les vecteurs propres de couplage globaux

4.1.4.2. Détermination des coefficients propres des systèmes couplés r_{ik}

4.2. RESOLUTION SIMPLIFIEE BASEE SUR LE CHEMIN MODAL DOMINANT

4.2.1. Introduction et hypothèses

4.2.2. Mise en œuvre

4.2.2.1. Recherche de la valeur propre de couplage dominante

4.2.2.2. Recherche d'un coefficient propre optimisé

4.2.3. Résultats numériques

4.2.3.1. Valeurs propres de couplage

4.2.3.2. Réponses en vitesse obtenues par la méthode simplifiée

4.2.4. Contrôle du chemin de transmission dominant

4.3. CALCUL DE LA REPONSE EN VITESSE DES PLAQUES A PARTIR DES QUANTITES PROPRES DE COUPLAGE ISOLEES

4.4. RESOLUTION SIMPLIFIEE BASEE SUR LE CHEMIN PHYSIQUE DOMINANT

4.5. RECOMPOSITION DES QUANTITES PROPRES DE COUPLAGE GLOBALES A PARTIR DES QUANTITES PROPRES DE COUPLAGE ISOLEES

4.5.1. Valeurs propres et vecteurs propres de couplage isolés

4.5.2. Coefficients de correspondance entre les vecteurs propres de couplage isolés

4.5.3. Matrice de passage entre les quantités propres de couplage globales et isolées

4.5.4. Calcul des coefficients propres globaux des systèmes découplés bloqués ρ_{oik}

4.6. CONCLUSION

4. Deux plaques couplées par N_k plaques

Après l'étude du couplage de deux plaques par un ressort, ce chapitre va traiter du couplage de deux plaques par une multitude de ressorts. La méthode de résolution pour un couplage multiple n'est pas fondamentalement différente de celle utilisée dans le cas du couplage unique. Néanmoins, des différences existent au niveau des valeurs propres et vecteurs propres de couplage. Il sera montré que leur nombre est égal au nombre de liaisons mais qu'il n'est plus possible de connaître leur expression analytique.

Le premier paragraphe résout le problème des deux plaques couplées par une démarche similaire à celle exposée aux chapitres précédents. La vitesse des plaques est décomposée sur les vecteurs propres de couplage. Les valeurs propres, vecteurs propres de couplage et coefficients propres sont obtenus par des moyens numériques. La réponse des systèmes couplés est égale à la vitesse des système découplés bloqués plus la somme des contributions issues du couplage. Cette sommation donne l'idée d'une solution approchée ne tenant compte que de la plus grande des contributions du couplage.

Cette méthode simplifiée est présentée. Elle donne une approximation de la solution exacte à partir de la valeur propre de couplage correspondant au chemin de transmission modal dominant. Des résultats numériques pour un couplage par neuf ressorts compareront les méthodes exactes et simplifiées.

Le troisième paragraphe utilise les valeurs propres et vecteurs propres de couplage isolés pour reconstruire la réponse en vitesse des plaques. L'avantage de cette méthode vient de ce que les quantités propres isolées sont très faciles à calculer individuellement. Elle est de plus très bien adaptée à l'approche expérimentale qui accède presque directement à ces valeurs propres isolées (approche expérimentale présentée au chapitre 5). La réponse des systèmes fait aussi intervenir ici une somme de contributions décrivant le couplage ; la simplification à la contribution dominante génère une méthode simplifiée, basée alors sur le chemin physique dominant. Le quatrième paragraphe présente les résultats obtenus au moyen de cette méthode simplifiée quand les deux plaques sont couplées par neuf ressorts.

Enfin, le dernier paragraphe donne les moyens de recomposer des quantités propres globales (c'est-à-dire celles qui servent à la résolution du premier paragraphe) à partir des quantités propres de couplage "isolées" (celles directement accessibles par la mesure). Les résultats de ce paragraphe sont indispensables pour mener à bien certains calculs du § 4.3. Pour préserver le déroulement logique du plan, il a été placé à la fin de ce chapitre ; le lecteur pourra à s'y reporter en cas de besoin.

4.1. CALCUL DE LA REPOSE EN VITESSE DES PLAQUES A PARTIR DES QUANTITES PROPRES DE COUPLAGE GLOBALES

Les chapitres précédents n'ont traité que le cas d'un seul ressort de couplage, quel que soit le nombre de degré de liberté des systèmes qui étaient couplés, et ont donné des expressions analytiques des valeurs propres et vecteurs propres de couplage. Dans le cas de N_k liaisons, si l'expression de la matrice de couplage s'établit aisément, les expressions analytiques des N_k couples de valeurs propres de couplage (et vecteurs propres de couplage associés) n'ont pas d'expression analytique simple. Cependant, il suffit d'appliquer les techniques numériques à la matrice de couplage globale pour accéder à ces quantités.

4.1.1. Définition de la matrice de couplage globale

Le calcul des sous-matrices $\overline{\overline{Z}}'_{ii}$ et $\overline{\overline{Z}}'_{ij}$ caractéristiques du comportement vibratoire dans la base des plaques découplées libres (ϕ) s'effectue sans difficulté en superposant l'effet des N_k ressorts. Compte tenu de la linéarité du problème et en utilisant les Eq. 2.43 à Eq. 2.46 définies pour la contribution d'un seul ressort, il vient pour les sous-matrices $\overline{\overline{Z}}'_{ii}$:

$$(\overline{\overline{Z}}'_{11})_{mn} = j\omega m \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} - \frac{\omega_{1m}^2}{\omega^2} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \mathbf{a} \sum_{i=1}^{N_k} \frac{k_i}{j\omega} \phi_{1m}(Q_{1i}) \phi_{1m}(Q_{1i})$$

Eq. 4.1

$$(\overline{\overline{Z}}'_{22})_{mn} = j\omega m \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} - \frac{\omega_{2m}^2}{\omega^2} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \mathbf{a} \sum_{i=1}^{N_k} \frac{k_i}{j\omega} \phi_{2m}(Q_{2i}) \phi_{2m}(Q_{2i})$$

Eq. 4.2

Les sous-matrices d'impédance modale qui relie la force exercée sur le système 1 (resp. 2) à la vitesse du système 2 (resp. 1) s'écrivent :

$$(\overline{\overline{Z}}'_{12})_{mn} = \mathbf{a} \sum_{i=1}^{N_k} \frac{k_i}{j\omega} \phi_{1m}(Q_{1i}) \phi_{2n}(Q_{2i})$$

Eq. 4.3

$$(\overline{\overline{Z}}'_{21})_{mn} = \mathbf{a} \sum_{i=1}^{N_k} \frac{k_i}{j\omega} \phi_{2n}(Q_{2i}) \phi_{1m}(Q_{1i})$$

Eq. 4.4

Ces sous-matrices représentent le comportement vibratoire de l'assemblage quand on projette les vitesses des plaques sur les bases modales des plaques découplées libres (ϕ) (les sous-matrices se signalent alors par le signe ').

Les chapitres précédents ont montré que pour étudier les vibrations des systèmes couplés (plaques comme oscillateurs), il était préférable d'utiliser la base modale découplée bloquée qui se définit comme suit : dans le cas de N_k ressorts, la notion de système découplé bloqué consiste en ce que chaque plaque est considérée avec ses N_k ressorts bloqués¹.

On réécrit les expressions des sous-matrices de la matrice d'impédance dans la base modale des plaques découplées bloquées :

$$(Z_{11})_{mn} = j\omega m_1 \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} \mathbf{1} - \frac{\omega_{1m}^2}{\omega^2} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Eq. 4.5

$$(Z_{22})_{mn} = j\omega m_2 \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} \mathbf{1} - \frac{\omega_{2m}^2}{\omega^2} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Eq. 4.6

Ces deux sous-matrices sont diagonales. Les sous-matrices d'impédance modale qui relie la force exercée sur le système 1 (resp. 2) à la vitesse du système 2 (resp. 1) s'écrivent :

$$(Z_{12})_{mn} = \mathbf{a} \sum_{i=1}^{N_k} \frac{k_i}{j\omega} \psi_{1m}(Q_{1i}) \psi_{2n}(Q_{2i})$$

Eq. 4.7

$$(Z_{21})_{mn} = \mathbf{a} \sum_{i=1}^{N_k} \frac{k_i}{j\omega} \psi_{2n}(Q_{2i}) \psi_{1m}(Q_{1i})$$

Eq. 4.8

Des deux équations précédentes, on déduit l'expression générale de la matrice de couplage dans le cas de liaisons multiples :

$$(C_{12})_{mn} = \frac{\mathbf{a} \sum_{i=1}^{N_k} \frac{k_i}{j\omega} \psi_{1m}(Q_{1i}) \psi_{2n}(Q_{2i})}{Z_{11m}}$$

Eq. 4.9

¹ La notation de la base modale des plaques chargées par N_k ressorts restera identique à celle de la plaque chargée par un seul ressort, c'est-à-dire (ψ). En effet, la configuration de N_k ressorts impose un double indice aux coordonnées des points de connexions (un pour le numéro de la plaque et l'autre pour le numéro du ressort), ce qui permet de les distinguer.

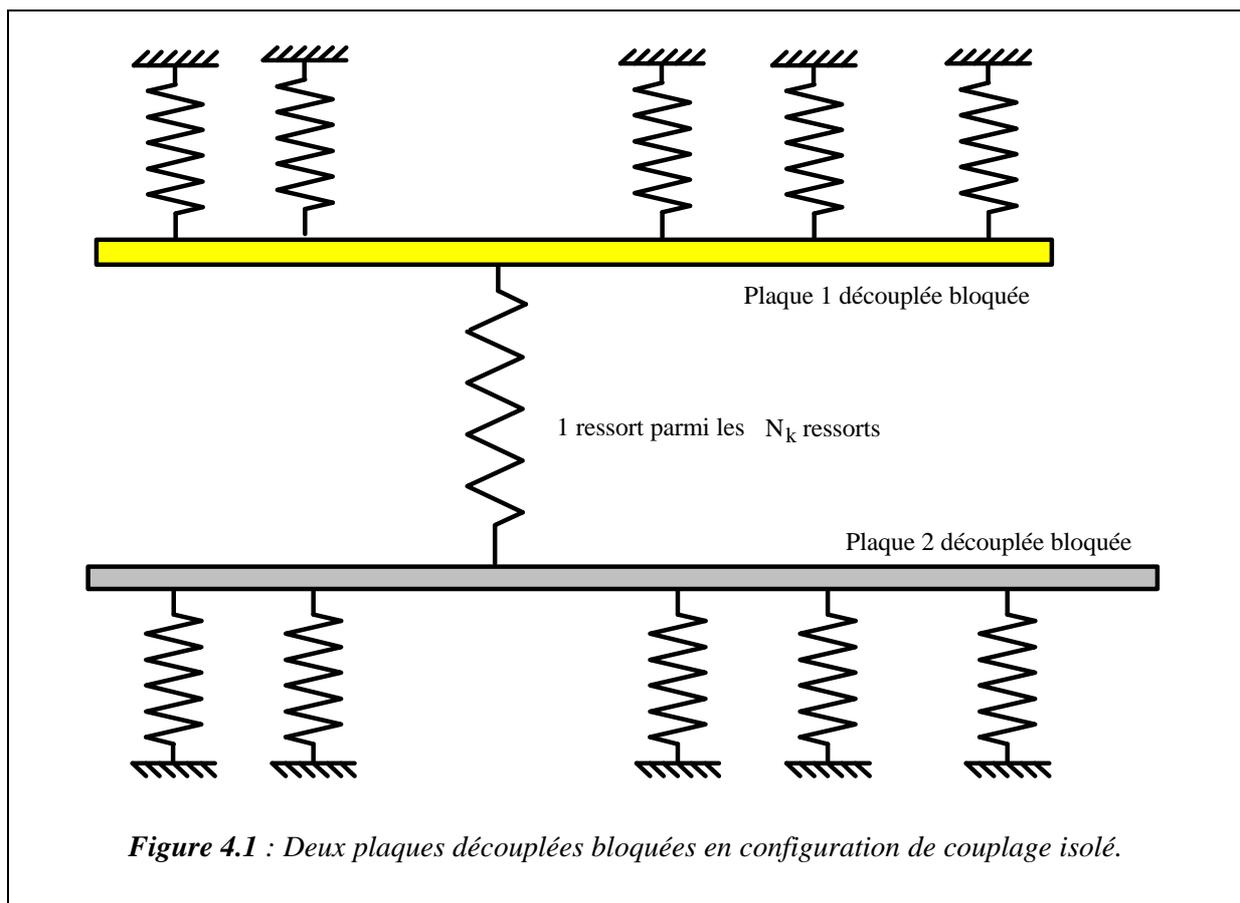
$$(C_{21})_{nm} = \frac{\dot{\mathbf{a}} \sum_{i=1}^{N_k} \frac{k_i}{j\omega} \psi_{1m}(Q_{1i}) \psi_{2n}(Q_{2i})}{Z_{22n}}$$

Eq. 4.10

4.1.2. La configuration “isolée”

Cette configuration est un intermédiaire qui permettra par la suite d'exploiter des résultats expérimentaux ainsi que fournir une autre méthode de calcul des quantités propres de couplage globales. A ce niveau de la résolution, elle permet de donner le nombre de valeurs propres de couplage et de vecteurs propres de couplage qu'admet la matrice de couplage globale².

La configuration “isolée” consiste à considérer le couplage des deux plaques par un seul ressort à la fois, les autres restant bloqués. La Figure 4.1 décrit ce montage.



² Les expressions détaillées se rapportant à la configuration isolée seront développées au § 4.5 qui donnera en outre les moyens de passer des quantités propres de couplage isolées aux quantités propres de couplage globales.

Pour bien différencier ces quantités propres globales ou isolées, on leur donne les noms suivants : matrice de couplage globale $\overline{\overline{C}}$, valeurs propres globales Λ_j , vecteurs propres globaux $\overline{\overline{\Phi}}_{1j}$ et $\overline{\overline{\Phi}}_{2j}$, et enfin coefficients propres globaux ρ_{1j} et ρ_{2j} , où “j” décrit l’ensemble des N_k liaisons. Pour les quantités isolées, on reprend la notation utilisée dans le cas de la liaison unique, en rajoutant un indice variant de 1 à N_k : matrice de couplage isolées \overline{C}_j , valeurs propres isolées λ_j , vecteurs propres isolés $\overline{\Phi}_{1j}$ et $\overline{\Phi}_{2j}$, et enfin les coefficients propres isolés α_{1j} et α_{2j} .

Dans la configuration globale, l’équation fondamentale des quantités propres se note :

$$\overline{\overline{C}}\{\overline{\overline{\Phi}}_j\} = \Lambda_j\{\overline{\overline{\Phi}}_j\}, \quad j \in \mathbf{1} [..N_k]$$

Eq. 4.11

Une équation de même forme est valable pour chacune des quantités propres en configuration isolée :

$$\overline{C}_j\{\overline{\Phi}_j\} = \lambda_j\{\overline{\Phi}_j\}, \quad j \in \mathbf{1} [..N_k]$$

Eq. 4.12

Il faut bien noter que les quantités propres de couplage isolées sont différentes des quantités propres de couplage globales.

4.1.3. Propriétés de la matrice de couplage globale

La matrice de couplage globale admet autant de couples de valeurs propres de couplage et de vecteurs propres de couplage que de liaisons, donc N_k . La démonstration de cette assertion s’effectue en remarquant que la matrice de couplage globale (cf. Eq. 4.9 et Eq. 4.10) peut s’écrire comme la somme de N_k matrices de couplage isolées, c’est-à-dire les matrices n’ayant qu’un seul ressort pris en compte à la fois, mais toujours avec la condition de plaques découplées bloquées.

On donne l’expression de la $j^{\text{ème}}$ matrice de couplage isolée³ :

$$(C_{12j})_{mn} = \frac{k_j}{j\omega} \frac{\psi_{1m}(Q_{1j})\psi_{2n}(Q_{2j})}{Z_{11m}}$$

Eq. 4.13

³ Quelles que soient les matrices de couplage (globales ou isolées), la base modale utilisée est maintenant celle des plaques découplées bloquées comportant les N_k ressorts bloqués, et donc l’expression de l’impédance modale des plaques découplées bloquées (du dénominateur) reste la même quel que soit le ressort considéré.

$$(C_{21j})_{nm} = \frac{k_j \psi_{1m}(Q_{1j}) \psi_{2n}(Q_{2j})}{j\omega Z_{22_n}}$$

Eq. 4.14

Dans le cas d'un unique ressort (cf. chapitre 3), on a montré que la matrice de couplage est de rang 2 et n'admet donc qu'une seule paires de valeurs propres de signe opposé. Cette propriété ne dépend pas de la base de vibration découplée bloquée (ψ) ni des termes de $\overline{Z_{ii}}$, ainsi l'on peut écrire la matrice de couplage globale comme la somme des N_k matrices de couplage isolées :

$$\overline{C} = \sum_{j=1}^{N_k} \overline{C}_j$$

Eq. 4.15

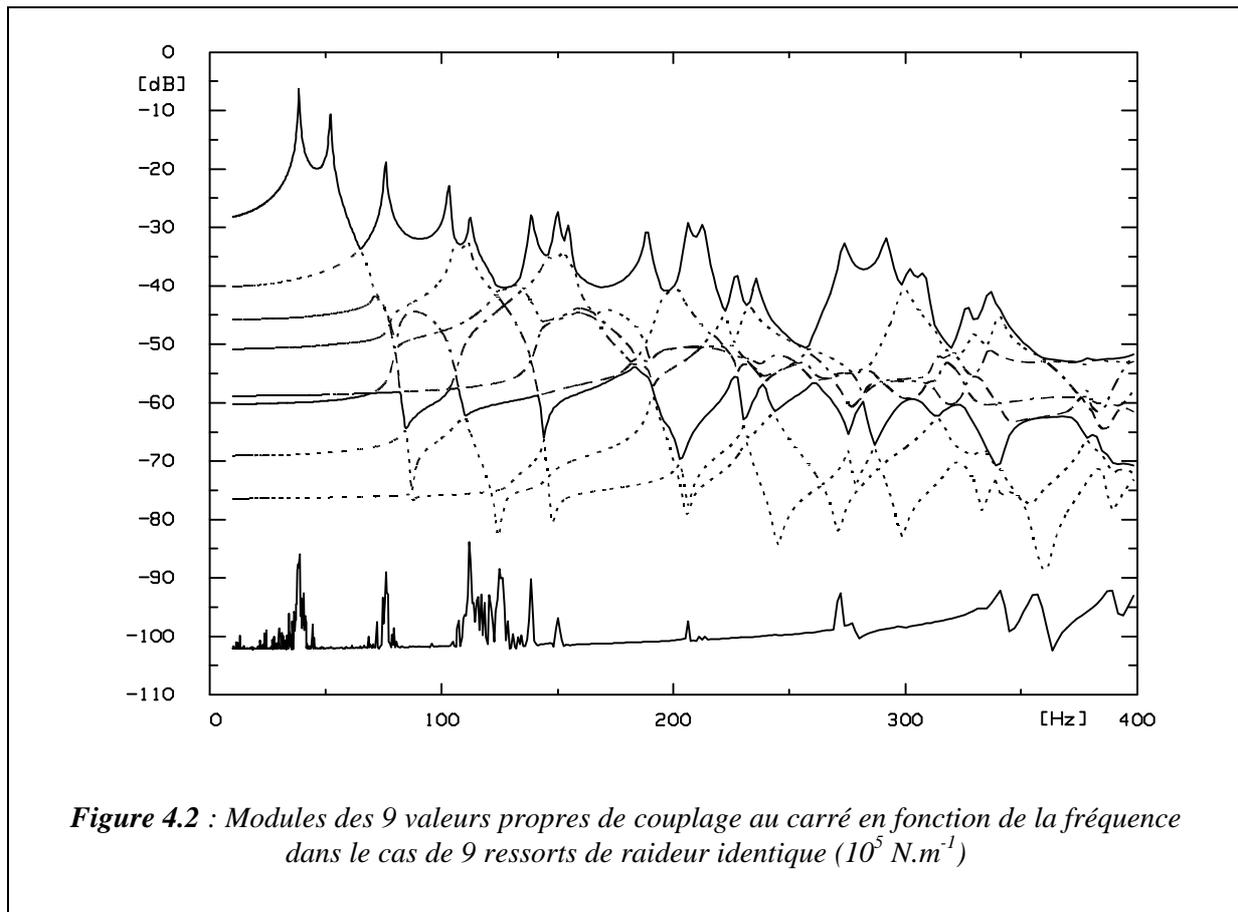
À chaque matrice de couplage isolée est associée une solution qui constitue un espace vectoriel de même dimension que le rang de la matrice. La somme de deux matrices de couplage isolées⁴ (de rang 2) donne une solution qui constitue un espace vectoriel lui-même réunion des sous-espaces correspondants aux solutions élémentaires. Si les deux sous-espaces sont distincts, la matrice est de rang 2+2. Dans le cas où les deux sous-espaces peuvent être confondus, le rang est inférieur ou égal à 2. L'extension à un rang supérieur est évident. Dans le cas où le nombre de modes considéré dans le calcul est fini, la limite supérieure du rang de la matrice de couplage est la dimension de la matrice de couplage. Il faut bien penser que dans le cas d'une liaison ponctuelle, le nombre de modes est naturellement très supérieur au nombre de liaison. Il en ressort que la matrice de couplage globale admet en général N_k paires de valeurs propres et de vecteurs propres de couplage.

La Figure 4.2 montre ces valeurs propres de couplage globales (au carré) en fonction de la fréquence (selon les données numériques fournies par l'Annexe 3). Ces valeurs propres de couplage sont obtenues par un calcul numérique au pas à pas en fréquence.

Aucune de ces valeurs propres de couplage n'atteint 0 dB, c'est-à-dire que le couplage est faible. Bien que tous les ressorts soient de raideur identique, on constate qu'il existe toujours une valeur propre de couplage largement dominante à la quasi totalité des fréquences ; cette notion de valeur propre de couplage dominante ne disparaît réellement que lorsque les deux plus grandes valeurs propres de couplage se croisent.

L'allure de la plus petite des valeurs propres de couplage comporte des variations qui sont dues à du bruit numérique, le très faible niveau de cette valeur propre de couplage expliquant ce phénomène.

⁴ Les matrices de couplage isolées sont uniques car dépendantes des coordonnées des points de connexion sur les plaques de chaque ressort, eux-mêmes supposés de localisation distincte les uns des autres.



4.1.4. Calcul de la réponse en vitesse des plaques

4.1.4.1. Décomposition sur les vecteurs propres de couplage globaux

Cette résolution suppose que l'on a calculé les quantités propres de couplage requises par la méthode. En dehors du fait qu'il y a maintenant N_k ressorts de liaison, la démarche est globalement la même que dans le cas du couplage par un seul ressort.

La vitesse vibratoire des plaques donnée dans le chapitre 2 à partir des vitesses des systèmes découplés bloqués et de la matrice de couplage, reste bien sûr valable dans le cas de N_k ressorts. On rappelle son expression :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{i}} \bar{\mathbf{w}}_1 \bar{\mathbf{u}} &= \hat{\mathbf{i}} \bar{\mathbf{w}}_{o1} \bar{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{i}} \bar{\mathbf{w}}_1 \bar{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{i}} \bar{\mathbf{w}}_2 \bar{\mathbf{y}} &= \hat{\mathbf{i}} \bar{\mathbf{w}}_{o2} \bar{\mathbf{y}} + \mathbf{C} \hat{\mathbf{i}} \bar{\mathbf{w}}_2 \bar{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

Eq. 4.16

Selon une démarche de décomposition déjà vue plusieurs fois lors des chapitres précédents, on décompose le vecteur vitesse sur l'ensemble des vecteurs propres de couplage

globaux. On assortit cette décomposition d'un vecteur résidu qui représente la partie du vecteur vitesse qui ne serait pas dans le sous-espace engendré par les vecteurs propres de couplage globaux :

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}_1 \\ \hat{\mathbf{w}}_2 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}_1 \\ \hat{\mathbf{R}}_2 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{y}} + \sum_{i=1}^{N_k} \hat{\mathbf{a}}_i \begin{bmatrix} \rho_{1i} \bar{\Phi}_{1i} \\ \rho_{2i} \bar{\Phi}_{2i} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}$$

Eq. 4.17

Le vecteur résidu appartient au noyau de l'application décrite par la matrice de couplage et donc :

$$\bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$$

Eq. 4.18

La multiplication de l'Eq. 4.17 par la matrice de couplage entraîne, compte tenu de l'Eq. 4.18 :

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}_1 \\ \hat{\mathbf{w}}_2 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}_1 \\ \hat{\mathbf{R}}_2 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{y}} + \sum_{i=1}^{N_k} \hat{\mathbf{a}}_i \begin{bmatrix} \rho_{1i} \bar{\Phi}_{1i} \\ \rho_{2i} \bar{\Phi}_{2i} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{N_k} \hat{\mathbf{a}}_i \begin{bmatrix} \Lambda_i \rho_{2i} \bar{\Phi}_{1i} \\ \Lambda_i \rho_{1i} \bar{\Phi}_{2i} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}$$

Eq. 4.19

Le phénomène maintenant habituel de permutation des coefficients propres dû à la forme particulière de la matrice de couplage intervient dans le membre de droite, ainsi que l'apparition des valeurs propres de couplage et la disparition du vecteur résidu. En introduisant l'expression de l'Eq. 4.19 dans l'Eq. 4.16, on obtient la solution en vitesse des plaques couplées :

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}_1 \\ \hat{\mathbf{w}}_2 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}_{o1} \\ \hat{\mathbf{w}}_{o2} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{y}} + \sum_{i=1}^{N_k} \hat{\mathbf{a}}_i \begin{bmatrix} \Lambda_i \rho_{2i} \bar{\Phi}_{1i} \\ \Lambda_i \rho_{1i} \bar{\Phi}_{2i} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}$$

Eq. 4.20

La partie qui décrit le couplage proprement dit est une somme linéaire des quantités propres (le cas du couplage par un unique ressort constituait la restriction à l'ordre un de cette sommation). Une telle sommation induit des perspectives de diagnostic des transmissions vibratoires entre les systèmes au moyen d'un tri des valeurs propres de couplage globales. Comme les valeurs propres de couplage sont représentatives de la force du couplage, la démarche qui consiste à ne garder que les plus fortes contributions au couplage s'imagine aisément et sera étudiée plus loin dans ce chapitre lors de la résolution simplifiée (cf. § 4.2).

4.1.4.2. Détermination des coefficients propres des systèmes couplés r_{ik}

L'Eq. 4.20 contient encore des inconnues : les coefficients propres globaux ρ_{1k} et ρ_{2k} . Pour trouver leur expression, on commence par une démarche identique à celle entreprise dans le cas d'une liaison unique, à savoir multiplier l'équation du couplage (Eq. 4.20) par la matrice de couplage globale. Il est à nouveau fait usage de la décomposition du vecteur vitesse des plaques découplées bloquées, $\{\bar{w}_o\}$ sur les vecteurs propres de couplage globaux :

$$\begin{bmatrix} \hat{i} \bar{w}_{o1} \\ \hat{i} \bar{w}_{o2} \end{bmatrix} \bar{u} = \begin{bmatrix} \hat{i} \bar{R}_{o1} \\ \hat{i} \bar{R}_{o2} \end{bmatrix} \bar{u} + \sum_{i=1}^{N_k} \hat{i} \rho_{o1i} \bar{\Phi}_{1i} \bar{u} \\ \hat{i} \bar{w}_{o2} \end{bmatrix} \bar{y} = \sum_{i=1}^{N_k} \hat{i} \rho_{o2i} \bar{\Phi}_{2i} \bar{y}$$

Eq. 4.21

Le produit de l'Eq. 4.20 avec la matrice de couplage s'exprime comme suit :

$$\begin{bmatrix} \hat{e} \bar{0} \\ \hat{e} \bar{C}_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_{12} \bar{u}_1 \bar{w}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{u} = \begin{bmatrix} \hat{e} \bar{0} \\ \hat{e} \bar{C}_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_{12} \bar{u}_1 \bar{w}_{o1} \\ 0 \end{bmatrix} \bar{u} + \begin{bmatrix} \hat{e} \bar{0} \\ \hat{e} \bar{C}_{21} \end{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_k} \hat{i} \Lambda_i \rho_{2i} \bar{\Phi}_{1i} \bar{u} \\ \hat{e} \bar{C}_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_{12} \bar{u}_1 \bar{w}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{y} = \sum_{i=1}^{N_k} \hat{i} \Lambda_i \rho_{1i} \bar{\Phi}_{2i} \bar{y}$$

Eq. 4.22

La propriété fondamentale des quantités propres fait apparaître valeurs et vecteurs propres de couplage :

$$\sum_{i=1}^{N_k} \hat{i} \Lambda_i \rho_{2i} \bar{\Phi}_{1i} \bar{u} = \sum_{i=1}^{N_k} \hat{i} \Lambda_i \rho_{o2i} \bar{\Phi}_{1i} \bar{u} + \sum_{i=1}^{N_k} \hat{i} \Lambda_i^2 \rho_{1i} \bar{\Phi}_{1i} \bar{u} \\ \sum_{i=1}^{N_k} \hat{i} \Lambda_i \rho_{1i} \bar{\Phi}_{2i} \bar{y} = \sum_{i=1}^{N_k} \hat{i} \Lambda_i \rho_{o1i} \bar{\Phi}_{2i} \bar{y} + \sum_{i=1}^{N_k} \hat{i} \Lambda_i^2 \rho_{2i} \bar{\Phi}_{2i} \bar{y}$$

Eq. 4.23

Le fait que les vecteurs propres $\{\bar{\Phi}_k\}$ constituent une base⁵ du sous-espace de couplage et que la décomposition dans cette base soit unique permet d'écrire que chacun des coefficients du vecteur propre doit être nul :

$$\sum_{i=1}^{N_k} \hat{i} \left(\Lambda_i \rho_{2i} - \Lambda_i \rho_{o2i} - \Lambda_i^2 \rho_{1i} \right) \bar{\Phi}_{1i} \bar{u} = \hat{i} \bar{0} \bar{u} \\ \sum_{i=1}^{N_k} \hat{i} \left(\Lambda_i \rho_{1i} - \Lambda_i \rho_{o1i} - \Lambda_i^2 \rho_{2i} \right) \bar{\Phi}_{2i} \bar{y} = \hat{i} \bar{0} \bar{y}$$

Eq. 4.24

Cela donne N_k systèmes élémentaires de deux équations à deux inconnues (ρ_{1i} , ρ_{2i}) à résoudre. Pour chacune des N_k composantes considérée, il vient :

$$\begin{bmatrix} \hat{i} \rho_{1i} \\ \hat{i} \rho_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{o1i} + \Lambda_i \rho_{2i} \\ \rho_{o2i} + \Lambda_i \rho_{1i} \end{bmatrix} \quad \text{" } \hat{i} \hat{I} [1, N_k]$$

Eq. 4.25

⁵ Les vecteurs propres de couplage globaux ne sont pas orthogonaux.

Chaque système "i" est indépendant des autres ($N_k - 1$) systèmes. La résolution de ces équations permet d'écrire la généralisation de l'expression Eq. 3.45 du chapitre 3 :

$$\begin{aligned} \begin{matrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{i} \end{matrix} \rho_{1i} &= \frac{\rho_{o1i} + \Lambda_i \rho_{o2i}}{1 - \Lambda_i^2} \\ \begin{matrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{i} \end{matrix} \rho_{2i} &= \frac{\rho_{o2i} + \Lambda_i \rho_{o1i}}{1 - \Lambda_i^2} \end{aligned} \quad \text{pour } \mathbf{i} \in [1, N_k]$$

Eq. 4.26

Les valeurs propres de couplage globales et les vecteurs propres de couplage globaux qui composent l'Eq. 4.20 sont déterminés par des méthodes numériques. On vient d'établir les expressions des coefficients propres ρ_{1k} et ρ_{2k} . Il ne reste qu'à déterminer les coefficients ρ_{o1k} et ρ_{o2k} , ce qui est fait pour l'instant au moyen d'une méthode numérique.

Les $2N_k$ coefficients nécessitent $2N_k$ équations qui sont données par le produit scalaire successif des N_k vecteurs propres de couplage $\vec{\Phi}_{1k}$ (et des N_k vecteurs propres de couplage $\vec{\Phi}_{2k}$) et du produit de la matrice de couplage avec le vecteur vitesse des systèmes découplés bloqués, $\vec{\bar{C}}\{\vec{w}_o\}$:

$$\begin{aligned} \begin{matrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{i} \end{matrix} \vec{\Phi}_{2k}^t \vec{\bar{C}}_{21} \vec{w}_{o2} &= \sum_{i=1}^{N_k} \Lambda_i \rho_{o1i} \vec{\Phi}_{2k}^t \vec{\Phi}_{2i} \\ \begin{matrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{i} \end{matrix} \vec{\Phi}_{1k}^t \vec{\bar{C}}_{12} \vec{w}_{o1} &= \sum_{i=1}^{N_k} \Lambda_i \rho_{o2i} \vec{\Phi}_{1k}^t \vec{\Phi}_{1i} \end{aligned} \quad \text{pour } k \in [1, N_k]$$

Eq. 4.27

La résolution numérique de ces deux systèmes d'équations fournit les coefficients ρ_{o1k} et ρ_{o2k} .

4.2. RESOLUTION SIMPLIFIEE BASEE SUR LE CHEMIN MODAL DOMINANT

4.2.1. Introduction et hypothèses

La finalité de notre approche est de trouver une simplification qui ne prendra en compte que l'information utile : mieux un phénomène physique est compris, plus il peut être simplifié. Une simplification réussie implique qu'à partir d'un minimum de calculs ou d'un minimum de données, on obtienne une solution physiquement acceptable, c'est-à-dire dont la précision est connue. Dans notre cas, on cherchera à minimiser les calculs et donc, le nombre de données à manipuler. De plus, on tentera d'extraire des informations supplémentaires par rapport à ce qu'une résolution classique type inversion de la matrice d'impédance pourrait donner (cf. § 2.1.5.). En bref, comprendre le mieux possible ce qu'il se passe au niveau du couplage lorsque les deux systèmes se transmettent de l'information.

L'Eq. 4.20 a montré que la contribution du couplage s'opère par la somme des contributions élémentaires de chaque valeur propre et vecteur propre de couplage globaux, associés aux coefficients propres. Les valeurs propres de couplage globales étant représentatives de la force du couplage, ce sont elles qui serviront de critère de simplification.

Le fondement de la démarche consiste donc en un classement des valeurs propres de couplage globales selon le critère de tri donné au premier chapitre : $|\lambda|/(1-\lambda^2)$.

Remarque : Dans le cas particulier où toutes les valeurs propres de couplage sont de module inférieur à un, ce critère s'assimile à la plus grande valeur propre de couplage $|\lambda|$.

4.2.2. Mise en œuvre et résultats

4.2.2.1. Recherche de la valeur propre de couplage dominante

La mise en œuvre de cette méthode simplifiée suppose qu'à chaque pas en fréquence, la valeur propre de couplage dominante soit calculée. Pour cela, trois méthodes de calcul sont possibles, dont deux assez similaires :

- La première, assez gourmande en temps de calcul, consiste en le calcul de toutes les valeurs propres de couplage globales et donc de tous les vecteurs propres de couplage globaux par une méthode numérique standards (type IMSL).
- L'autre méthode, sensiblement similaire quoique nettement plus rapide, consiste à calculer analytiquement les valeurs propres de couplage isolées et à recomposer les quantités propres globales (par la démarche indiquée dans le § 4.5).

Malheureusement, dans ces deux cas de figure, la simplification se justifie moins dans la mesure où toutes les quantités propres de couplage sont calculées et donc la solution complète ne prend guère plus de temps à être construite que la solution simplifiée. Cependant, on gagne une information très intéressante sur les valeurs propres de couplage par rapport à la méthode classique d'inversion de la matrice d'impédance.

- La dernière technique pour calculer la valeur propre de couplage nécessaire à la résolution simplifiée est la méthode de recherche par processus itératif des valeurs propres de couplage⁶.

Celle-ci fournit la valeur propre de couplage qui a le plus grand module (et le vecteur propre de couplage associé). Cela signifie que cette méthode de calcul n'est intéressante que si le module de la plus grande des valeurs propres de couplage est inférieur à un, c'est la situation de couplage faible. Cette approche permet de ne calculer que la valeur propre strictement nécessaire au calcul simplifié.

Comme l'on ne dispose plus de toutes les valeurs propres de couplage et de tous les vecteurs propres de couplage, le calcul des coefficients propres par la méthode indiquée au § 4.1.4.2 n'est pas possible sous cette forme. Néanmoins, on verra à la fin du § 4.2.2.2. suivant comment calculer ces coefficients dans ce cas.

4.2.2.2. Recherche d'un coefficient propre optimisé

Une question se pose à ce stade de la résolution simplifiée. Est-ce que les coefficients propres ρ_i et ρ_{oi} déterminés au § 4.1.1., sont ceux qui vont le mieux approcher la solution dans le cas où un seul chemin modal vibratoire est pris en compte ou bien existe-t-il des coefficients ρ_i' qui sont encore plus performants et qui vont ajuster le mieux possible la participation du vecteur à chaque pas en fréquence ?

Soit un vecteur $\{\bar{\mathbf{X}}\}$, solution de l'équation du couplage :

$$\begin{matrix} \mathbf{i} \bar{\mathbf{X}}_1 \ddot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{i} \bar{\mathbf{X}}_2 \dot{\mathbf{y}} \\ \mathbf{i} \bar{\mathbf{X}}_2 \mathbf{p} \end{matrix} = \begin{matrix} \mathbf{i} \bar{\mathbf{X}}_{o1} \ddot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{i} \bar{\mathbf{X}}_{o2} \dot{\mathbf{y}} \\ \mathbf{i} \bar{\mathbf{X}}_{o2} \mathbf{p} \end{matrix} + \mathbf{C} \begin{matrix} \mathbf{i} \bar{\mathbf{X}}_1 \ddot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{i} \bar{\mathbf{X}}_2 \dot{\mathbf{y}} \\ \mathbf{i} \bar{\mathbf{X}}_2 \mathbf{p} \end{matrix}$$

Eq. 4.28

Soit le vecteur $\{\bar{\mathbf{X}}\}$ qui prend la forme des solutions faisant intervenir les quantités propres de couplage globales, où Λ est la valeur propre de couplage dominante et $\{\bar{\Phi}\}$ son vecteur propre de couplage associé :

⁶ Pour mémoire, il suffit de projeter la matrice de couplage sur un vecteur quelconque (par exemple, un vecteur composé uniquement de 1), et de réitérer la manœuvre jusqu'à convergence, avec le vecteur résultant normé. On obtient ainsi à la fois le vecteur propre et la valeur propre de couplage. Il faut préciser que la convergence est généralement très rapide et que cette recherche de la plus grande valeur propre de couplage fait gagner beaucoup de temps par rapport à une détermination complète de type numérique (IMSL).

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} \bar{X} \mathbf{c} \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{i} \bar{X} \mathbf{c} \bar{\mathbf{y}} \\ \mathbf{i} \bar{X} \mathbf{c} \bar{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} \bar{X}_{o1} \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{i} \bar{X}_{o21} \bar{\mathbf{y}} \\ \mathbf{i} \bar{X}_{o21} \bar{\mathbf{p}} \end{pmatrix} + \Lambda \begin{pmatrix} \mathbf{i} \rho_2 \bar{\Phi}_1 \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{i} \rho_1 \bar{\Phi}_2 \bar{\mathbf{y}} \\ \mathbf{i} \rho_1 \bar{\Phi}_2 \bar{\mathbf{p}} \end{pmatrix}$$

Eq. 4.29

Le vecteur $\{\bar{X}\}$ est recherché de sorte qu'il donne une erreur ε minimum au sens de la norme de Hilbert. Si $\varepsilon = 0$, alors le vecteur $\{\bar{X}\}$ vérifie exactement l'équation du couplage Eq. 4.28.

$$\varepsilon = \left| \{\bar{X}\} - \{\bar{X}_o\} - \bar{C} \{\bar{X}\} \right|^2$$

Eq. 4.30

Remplacer les expressions de l'Eq. 4.29 dans l'Eq. 4.30 mène à la formulation développée de l'erreur ε :

$$\varepsilon = \left| \begin{array}{l} \Lambda \rho_2 \bar{\Phi}_1 - \bar{C}_{12} \bar{X}_{o2} - \Lambda^2 \rho_1 \bar{\Phi}_1 \\ \Lambda \rho_1 \bar{\Phi}_2 - \bar{C}_{21} \bar{X}_{o1} - \Lambda^2 \rho_2 \bar{\Phi}_2 \end{array} \right|^2$$

Eq. 4.31

Cette expression est réécrite en regroupant les coefficients des vecteurs propres :

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \left| \Lambda \rho_2 \bar{\Phi}_1 - \Lambda^2 \rho_1 \bar{\Phi}_1 \right|^2 - 2(\Lambda \rho_2 \bar{\Phi}_1 - \Lambda^2 \rho_1 \bar{\Phi}_1) \bar{\Phi}_1 \left| \bar{C}_{12} \bar{X}_{o2} \right| + \bar{C}_{12}^2 \bar{X}_{o2}^2 \\ & + \left| \Lambda \rho_1 \bar{\Phi}_2 - \Lambda^2 \rho_2 \bar{\Phi}_2 \right|^2 - 2(\Lambda \rho_1 \bar{\Phi}_2 - \Lambda^2 \rho_2 \bar{\Phi}_2) \bar{\Phi}_2 \left| \bar{C}_{21} \bar{X}_{o1} \right| + \bar{C}_{21}^2 \bar{X}_{o1}^2 \end{aligned}$$

Eq. 4.32

Le but du calcul est de déterminer quelle valeur de ρ_i' minimisera le mieux ε et donc quelle valeur de ρ_i' annulera la dérivée de ε par rapport à ρ_i' . Ainsi, l'Eq. 4.32 est dérivée successivement par rapport à ρ_1' et ρ_2' :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_1'} = & (2\Lambda^4 \rho_1' - 2\Lambda^3 \rho_2') \left| \bar{\Phi}_1 \right|^2 + 2\Lambda^2 \left\langle \bar{\Phi}_1 \left| \bar{C}_{12} \bar{X}_{o2} \right. \right\rangle \\ & + (2\Lambda^2 \rho_1' - 2\Lambda^3 \rho_2') \left| \bar{\Phi}_2 \right|^2 - 2\Lambda \left\langle \bar{\Phi}_2 \left| \bar{C}_{21} \bar{X}_{o1} \right. \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

Eq. 4.33

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_2'} = & (2\Lambda^4 \rho_2' - 2\Lambda^3 \rho_1') \left| \bar{\Phi}_2 \right|^2 + 2\Lambda^2 \left\langle \bar{\Phi}_2 \left| \bar{C}_{21} \bar{X}_{o1} \right. \right\rangle \\ & + (2\Lambda^2 \rho_2' - 2\Lambda^3 \rho_1') \left| \bar{\Phi}_1 \right|^2 - 2\Lambda \left\langle \bar{\Phi}_1 \left| \bar{C}_{12} \bar{X}_{o2} \right. \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

Eq. 4.34

Après avoir simplifié par Λ , les coefficients propres sont regroupés dans chacune des expressions :

$$\Lambda \rho_1' \left(\Lambda^2 |\bar{\Phi}_1|^2 + |\bar{\Phi}_2|^2 \frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} - \Lambda^2 \rho_2' |\bar{\Phi}_1|^2 + |\bar{\Phi}_2|^2 \frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} \right) \bar{\Phi}_2 \left| \overline{\overline{C}}_{21} \bar{X}_{o1} \right\langle - \Lambda \right\rangle \bar{\Phi}_1 \left| \overline{\overline{C}}_{12} \bar{X}_{o2} \right\langle \ddot{u} \right. \\ \left. \text{Eq. 4.35} \right.$$

$$- \Lambda^2 \rho_1' |\bar{\Phi}_1|^2 + |\bar{\Phi}_2|^2 \frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} + \Lambda \rho_2' |\bar{\Phi}_1|^2 + \Lambda^2 |\bar{\Phi}_2|^2 \frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} \right) \bar{\Phi}_1 \left| \overline{\overline{C}}_{12} \bar{X}_{o2} \right\langle - \Lambda \right\rangle \bar{\Phi}_2 \left| \overline{\overline{C}}_{21} \bar{X}_{o1} \right\langle \ddot{u} \right. \\ \left. \text{Eq. 4.36} \right.$$

Ces deux équations linéaires s'écrivent sous une forme matricielle qui permettra de calculer les coefficients ρ_1' et ρ_2' :

$$\begin{pmatrix} \Lambda \rho_1' & \Lambda \rho_2' \\ \rho_2' & \rho_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda^2 |\bar{\Phi}_1|^2 + |\bar{\Phi}_2|^2 \frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} & - \Lambda^2 |\bar{\Phi}_1|^2 + |\bar{\Phi}_2|^2 \frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} \\ - \Lambda^2 |\bar{\Phi}_1|^2 + |\bar{\Phi}_2|^2 \frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} & \Lambda^2 |\bar{\Phi}_1|^2 + |\bar{\Phi}_2|^2 \frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_2 \\ \bar{\Phi}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left| \overline{\overline{C}}_{21} \bar{X}_{o1} \right\langle - \Lambda \right\rangle \\ \left| \overline{\overline{C}}_{12} \bar{X}_{o2} \right\langle - \Lambda \right\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_1 \\ \bar{\Phi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left| \overline{\overline{C}}_{12} \bar{X}_{o2} \right\langle \ddot{u} \right. \\ \left. \left| \overline{\overline{C}}_{21} \bar{X}_{o1} \right\langle \ddot{u} \right. \end{pmatrix} \\ \left. \text{Eq. 4.37} \right.$$

La résolution de ce système linéaire passe par le calcul du déterminant de la matrice qui vaut :

$$\det = \Lambda^2 (\Lambda^2 - 1) |\bar{\Phi}_1|^2 |\bar{\Phi}_2|^2 \\ \left. \text{Eq. 4.38} \right.$$

L'inversion de cette matrice (2x2) est triviale. La connaissance du déterminant et l'écriture de la matrice des cofacteurs conduisent à l'expression de la solution, c'est-à-dire les coefficients ρ_i' :

$$\begin{pmatrix} \rho_1' \\ \rho_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda^2 |\bar{\Phi}_1|^2 + |\bar{\Phi}_2|^2 \frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} & - \Lambda^2 |\bar{\Phi}_1|^2 + |\bar{\Phi}_2|^2 \frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} \\ - \Lambda^2 |\bar{\Phi}_1|^2 + |\bar{\Phi}_2|^2 \frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} & \Lambda^2 |\bar{\Phi}_1|^2 + |\bar{\Phi}_2|^2 \frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_2 \\ \bar{\Phi}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left| \overline{\overline{C}}_{21} \bar{X}_{o1} \right\langle - \Lambda \right\rangle \\ \left| \overline{\overline{C}}_{12} \bar{X}_{o2} \right\langle - \Lambda \right\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_1 \\ \bar{\Phi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left| \overline{\overline{C}}_{12} \bar{X}_{o2} \right\langle \ddot{u} \right. \\ \left. \left| \overline{\overline{C}}_{21} \bar{X}_{o1} \right\langle \ddot{u} \right. \end{pmatrix} \\ \left. \text{Eq. 4.39} \right.$$

En développant chacun des coefficients ρ_i' :

$$\rho_1' = \frac{\Lambda \bar{\Phi}_2 \left| \overline{\overline{C}}_{21} \bar{X}_{o1} \right\langle \Lambda |\bar{\Phi}_1|^2 (1 - \Lambda^2) + \right\rangle \bar{\Phi}_1 \left| \overline{\overline{C}}_{12} \bar{X}_{o2} \right\langle \Lambda^2 |\bar{\Phi}_2|^2 (1 - \Lambda^2) \right. \\ \left. \Lambda^2 (\Lambda^2 - 1) |\bar{\Phi}_1|^2 |\bar{\Phi}_2|^2 \right. \\ \left. \text{Eq. 4.40} \right.$$

$$\rho_2' = \frac{\Lambda \bar{\Phi}_2 \left| \overline{\overline{C}}_{21} \bar{X}_{o1} \right\langle \Lambda^2 |\bar{\Phi}_1|^2 (1 - \Lambda^2) + \right\rangle \bar{\Phi}_1 \left| \overline{\overline{C}}_{12} \bar{X}_{o2} \right\langle \Lambda |\bar{\Phi}_2|^2 (1 - \Lambda^2) \right. \\ \left. \Lambda^2 (\Lambda^2 - 1) |\bar{\Phi}_1|^2 |\bar{\Phi}_2|^2 \right. \\ \left. \text{Eq. 4.41} \right.$$

Après simplifications, l'expression finale des coefficients s'écrit :

$$\rho_1' = \frac{\langle \vec{\Phi}_2 | \overline{C_{21} \bar{X}_{o1}} \rangle \langle \vec{u} | \vec{u} \rangle}{\Lambda (1 - \Lambda^2) |\vec{\Phi}_2|^2} + \frac{\langle \vec{\Phi}_1 | \overline{C_{12} \bar{X}_{o2}} \rangle \langle \vec{u} | \vec{u} \rangle}{(1 - \Lambda^2) |\vec{\Phi}_1|^2}$$

Eq. 4.42

$$\rho_2' = \frac{\langle \vec{\Phi}_2 | \overline{C_{21} \bar{X}_{o1}} \rangle \langle \vec{u} | \vec{u} \rangle}{(1 - \Lambda^2) |\vec{\Phi}_2|^2} + \frac{\langle \vec{\Phi}_1 | \overline{C_{12} \bar{X}_{o2}} \rangle \langle \vec{u} | \vec{u} \rangle}{\Lambda (1 - \Lambda^2) |\vec{\Phi}_1|^2}$$

Eq. 4.43

Avec ces valeurs des coefficients propres ρ_1' et ρ_2' , la solution qui consiste à ne prendre en compte que le seul chemin modal de transmission dominant parmi les N_k qui existent, est optimisée. Les résultats numériques relatifs à ces différentes méthodes seront montrés dans le paragraphe suivant.

Remarques

- Dans le cas où l'on ne dispose que de la plus grande des valeurs propres de couplage et son vecteur propre associé, les coefficients propres optimisés peuvent s'obtenir par une autre méthode. Pour cela, on effectue un calcul similaire à celui du § 4.1.4.2. en ne considérant que la plus grande valeur propre de couplage et son vecteur propre. Ainsi, les coefficients propres des systèmes découplés bloqués ρ'_{oi} s'expriment sous la forme suivante :

$$\left| \begin{aligned} \rho'_{o1} &= \frac{\langle \vec{\Phi}_2 | \overline{C_{21} \bar{W}_{o1}} \rangle}{\langle \vec{\Phi}_2 | \vec{\Phi}_2 \rangle} = \frac{\vec{\Phi}_2^t \overline{C_{21} \bar{W}_{o1}}}{|\vec{\Phi}_2|^2} = \rho_{o1} \\ \rho'_{o2} &= \frac{\langle \vec{\Phi}_1 | \overline{C_{12} \bar{W}_{o2}} \rangle}{\langle \vec{\Phi}_1 | \vec{\Phi}_1 \rangle} = \frac{\vec{\Phi}_1^t \overline{C_{12} \bar{W}_{o2}}}{|\vec{\Phi}_1|^2} = \rho_{o2} \end{aligned} \right.$$

Eq. 4.44

En insérant l'Eq. 4.44 dans l'Eq. 4.26, on constate que le coefficient propre trouvé par cette technique est égal au coefficient propre optimisé de l'Eq. 4.42.

- Il faut remarquer que le développement des expressions de l'Eq. 4.43 dans le cas où l'on remplace Λ et Φ par leurs expressions dans le cas d'une seule liaison, c'est-à-dire λ et φ , mène à l'expression des coefficients propres α_i (et donc α_{oi}) du § 3.4.2. Le résultat n'est pas très étonnant : il signifie que lorsqu'il y a une seule liaison, les coefficients propres permettent aux quantités propres d'être directement la meilleure approximation de la solution, et pour cause, puisque c'est la solution analytique exacte.

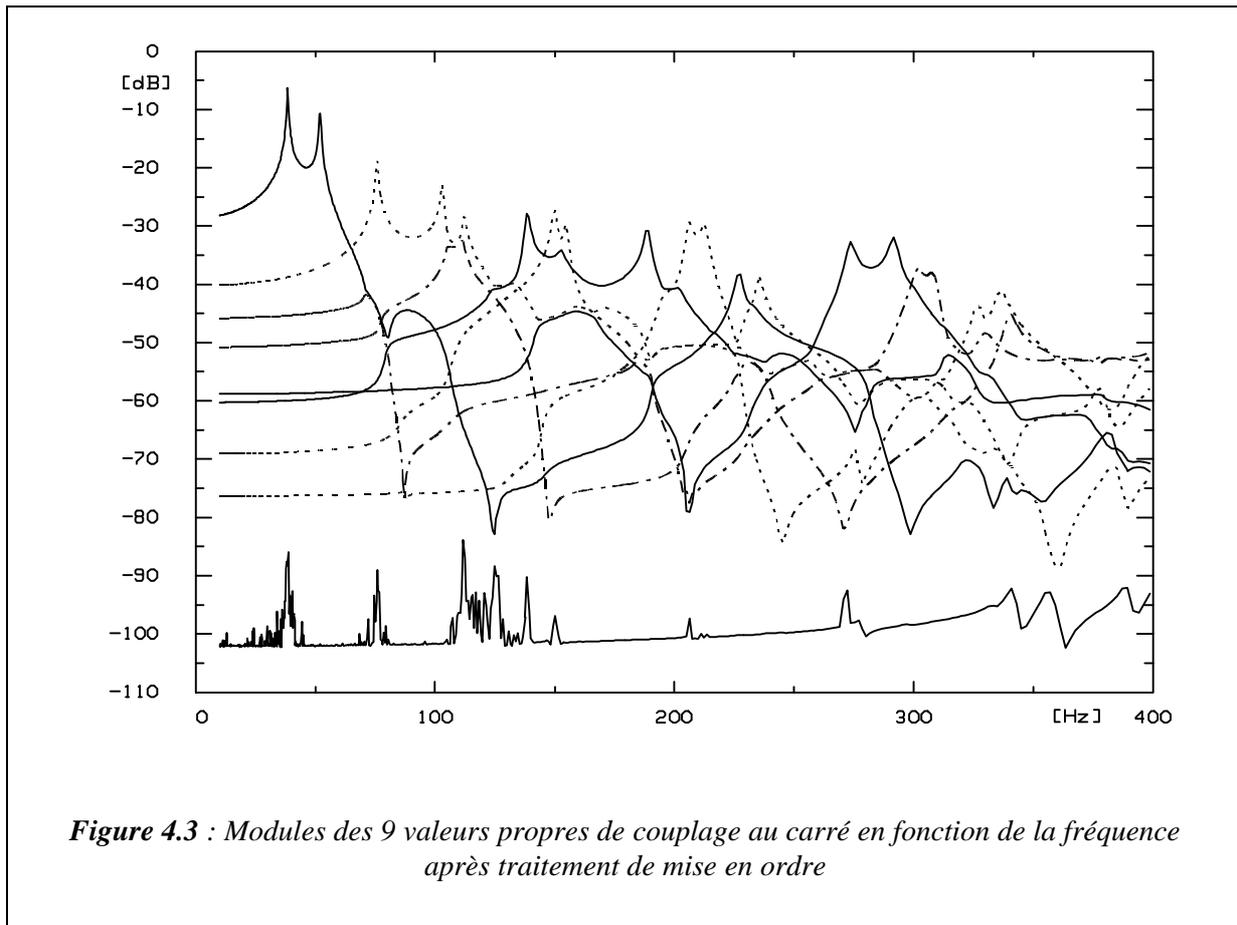
4.2.3. Résultats numériques

4.2.3.1. Valeurs propres de couplage

La Figure 4.3 a été obtenue en calculant les modules des valeurs propres de couplage au carré à chaque pas de fréquence (cf. valeurs numériques données en Annexe 3), comme dans le cas de la Figure 4.2. En revanche, on peut maintenant suivre l'évolution de chaque valeur propre de couplage sur l'ensemble de la plage fréquentielle grâce à un algorithme qui a été spécialement développé. Il est basé sur la minimisation de la distance entre deux points de fréquence successive représentant les valeurs propres de couplage, dans l'espace des nombres complexes (et pour être complet, après traitement des points d'accumulation). Après un tel traitement de l'ensemble des valeurs propres de couplage, on obtient des résultats du type de la Figure 4.3 où l'on peut observer que toute valeur propre de couplage peut être dominante à un moment ou à un autre. Par exemple, la valeur propre de couplage qui valait -75 dB aux plus basses fréquences, domine l'ensemble des valeurs propres de couplage sur la plage 200-220 Hz.

On peut retenir de cet algorithme qu'il permet de suivre la contribution de chaque valeur propre de couplage. Dans le cas de couplage multiple, chacune des valeurs propres de couplage n'est pas associée à un ressort particulier⁷. mais dépend des caractéristiques de tous les ressorts.

⁷ En revanche, les valeurs propres de couplage isolées dont on parlera au § 4.3. sont chacune associées à un ressort en particulier.



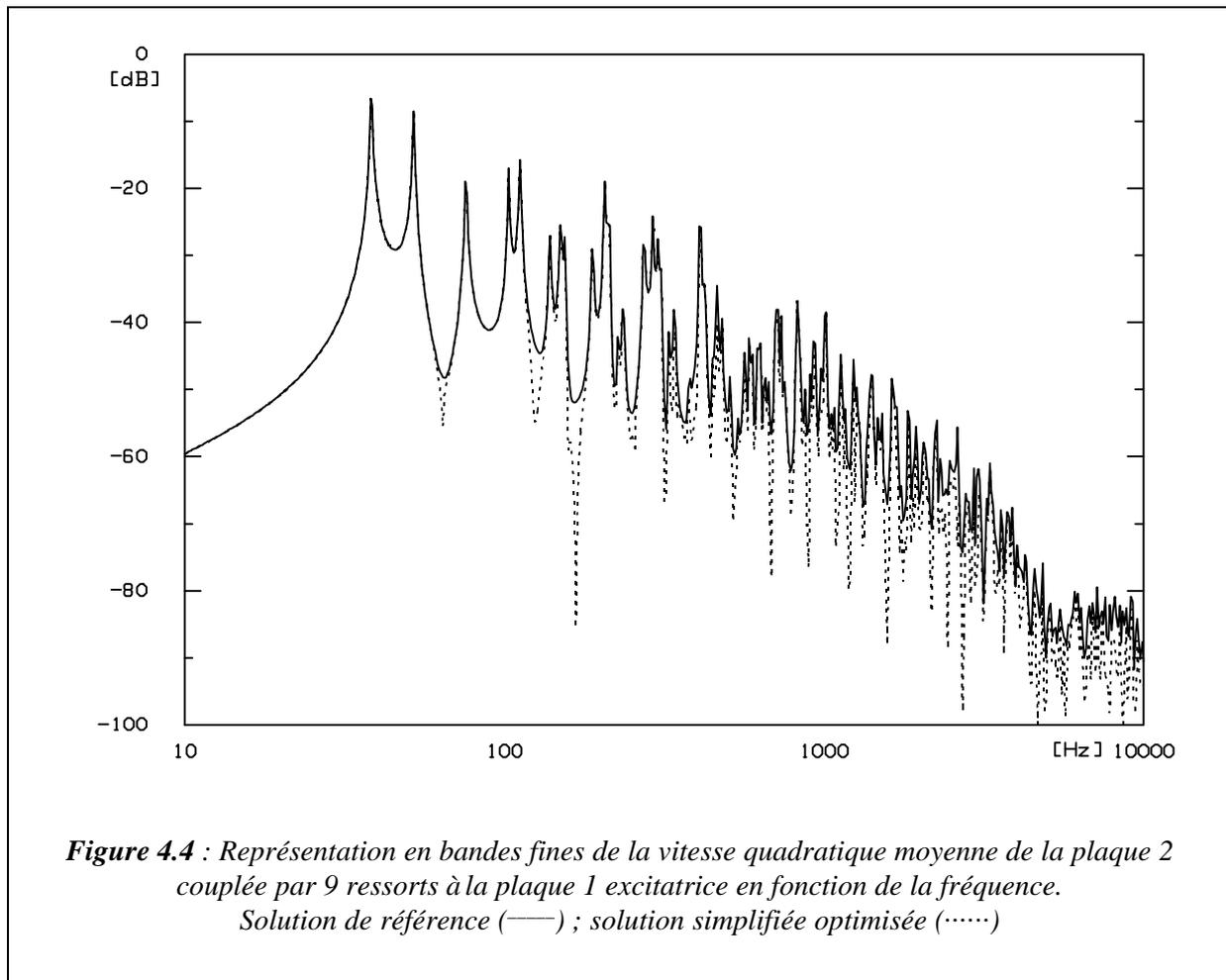
4.2.3.2. Réponses en vitesse obtenues par la méthode simplifiée

La méthode simplifiée est mise en œuvre dans le cas des deux plaques couplées par 9 ressorts de liaison (cf. données numériques de l'Annexe 3). Seule la plaque 1 est soumise à une excitation. Comme le couplage est faible, la vitesse de la plaque 1 après couplage n'est pas sensiblement différente de la vitesse de la plaque 1 avant couplage. C'est pourquoi l'on présente uniquement la réponse en vitesse de la plaque 2 qui est alors égale à la contribution du couplage (cf. Eq. 4.20), puisque $\vec{w}_{02} = \vec{0}$.

La Figure 4.3 a montré qu'avec les données numériques choisies, toutes les valeurs propres de couplage restent en dessous de un. Ainsi, la valeur propre de couplage dominante est simplement celle qui a le plus grand module.

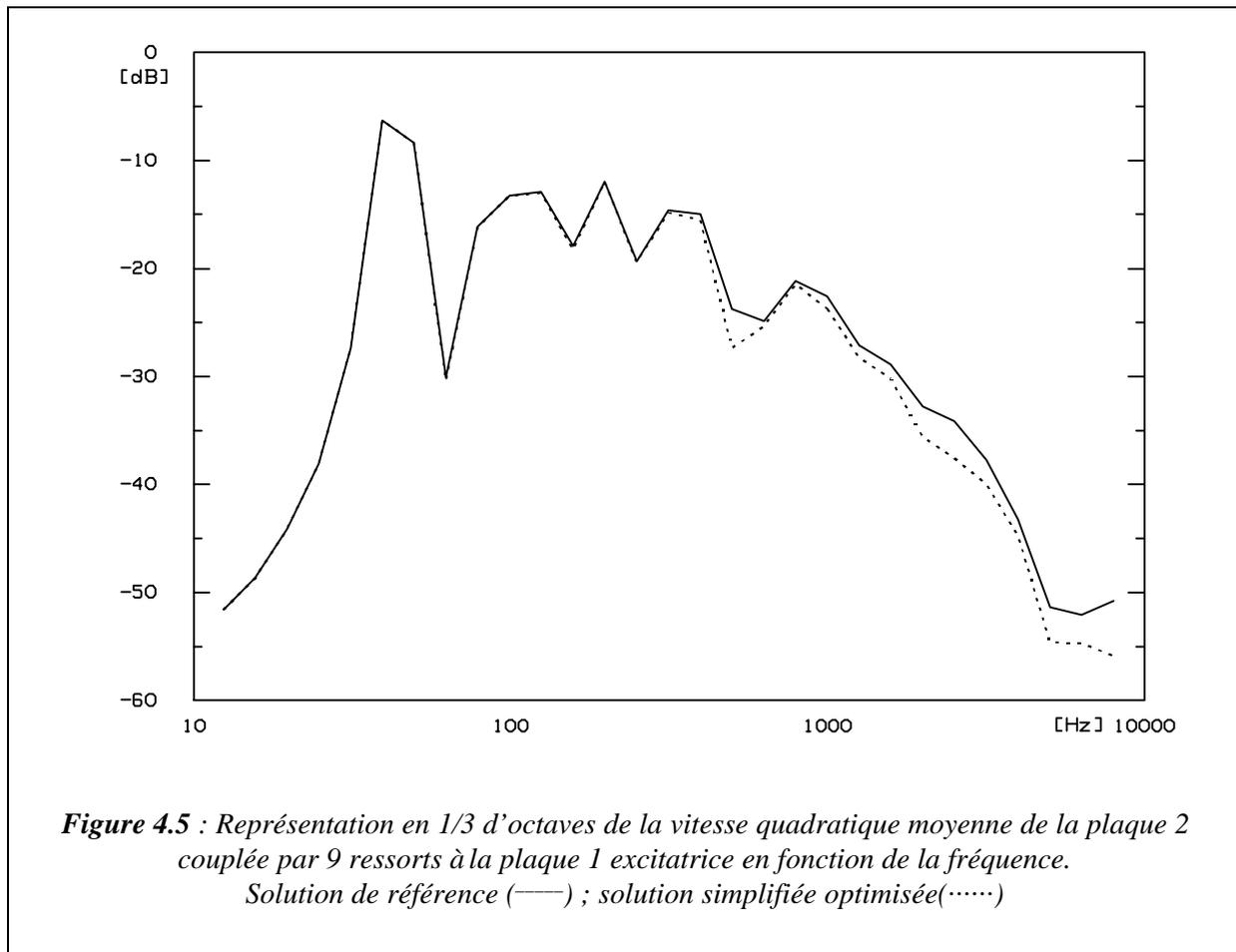
La Figure 4.4 représente la vitesse de la plaque 2 quand la plaque 1 est excitée. Il s'agit de la vitesse quadratique moyenne, c'est-à-dire de la moyenne quadratique des composantes du vecteur des amplitudes modales de la vitesse.

La solution de référence est obtenue par l'inversion de la matrice d'impédance modale définie au § 2.1.5.



Cette figure montre que la résolution simplifiée donne une estimation exacte de la vitesse des systèmes couplés, tant que cette vitesse décrit des résonances. Au contraire, dans les zones d'anti-résonances, la résolution simplifiée sous-estime largement le niveau de vitesse de référence.

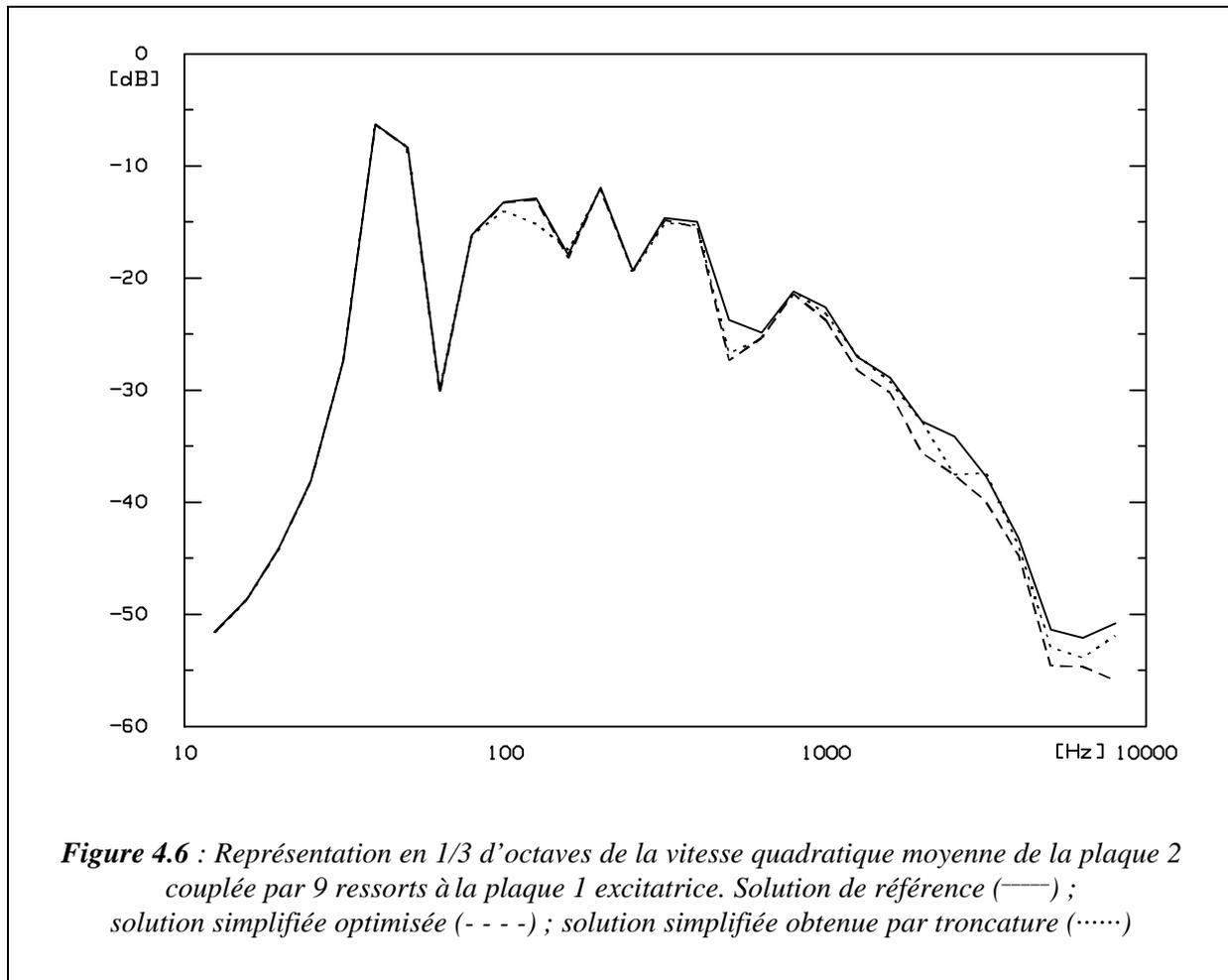
La représentation en tiers d'octave est parlante. A cet égard, la Figure 4.5 présente un résultat fondamental dans le cadre de l'étude sur le couplage. On constate que dans le domaine des basses fréquences mais aussi des moyennes fréquences, le fait de ne prendre qu'un seul chemin de transmission des vibrations (le chemin modal dominant en l'occurrence) décrit parfaitement la réalité physique. Autrement dit, l'information vibratoire qui arrive à la plaque non excitée n'utilise pratiquement que ce chemin modal de transmission. Dans les plus hautes fréquences, on observe une légère perte de transmission qui n'excède pas 3 dB. Cette mésestimation provient du fait que parfois, l'hypothèse fondamentale qui suppose qu'il y a une seule valeur propre de couplage dominante, n'est pas bien vérifiée. Cela se produit lorsque les deux plus grandes valeurs propres se croisent. A ce moment, il est évident qu'il n'y en a pas qu'une seule qui domine.



On peut voir en Figure 4.4 que la résolution simplifiée sous-estime le niveau de vitesse de référence dans les creux, mais comme cela se produit dans des zones de basse énergie, on n'observe pas d'influence sur la réponse en tiers d'octave. En revanche, le domaine des fréquences où la solution simplifiée sous-estime le niveau de vitesse (en tiers d'octave) vient du fait que le recouvrement modal (et donc le nombre de modes par bande) des valeurs propres de couplage va croissant avec la fréquence et que les croisements de ces valeurs propres s'intensifient. Il deviennent si nombreux que l'hypothèse d'une seule valeur propre dominante est de moins en moins souvent respectée dans chaque bande, et donc que la sous-estimation observée dans les creux de la représentation en bandes fines (Figure 4.4) finit par avoir de l'influence sur la représentation en tiers d'octave.

Il reste à comparer les performances du coefficient propre optimisé par rapport à une simple troncature de la solution, telle qu'elle peut être opérée sur l'Eq. 4.20. Il suffit de garder, à chaque pas en fréquence, la contribution du couplage correspondant à la plus grande des valeurs propres de couplage Λ_i . La Figure 4.6 montre la solution de référence et les deux solutions simplifiées.

On constate que malgré l'optimisation du coefficient propre, c'est pratiquement tout le temps la solution tronquée qui estime le mieux la solution de référence, sauf aux alentours de 100 Hz. L'explication de ce phénomène peut être que la représentation de la moyenne quadratique de la vitesse ne rend pas bien compte de l'optimisation calculée.

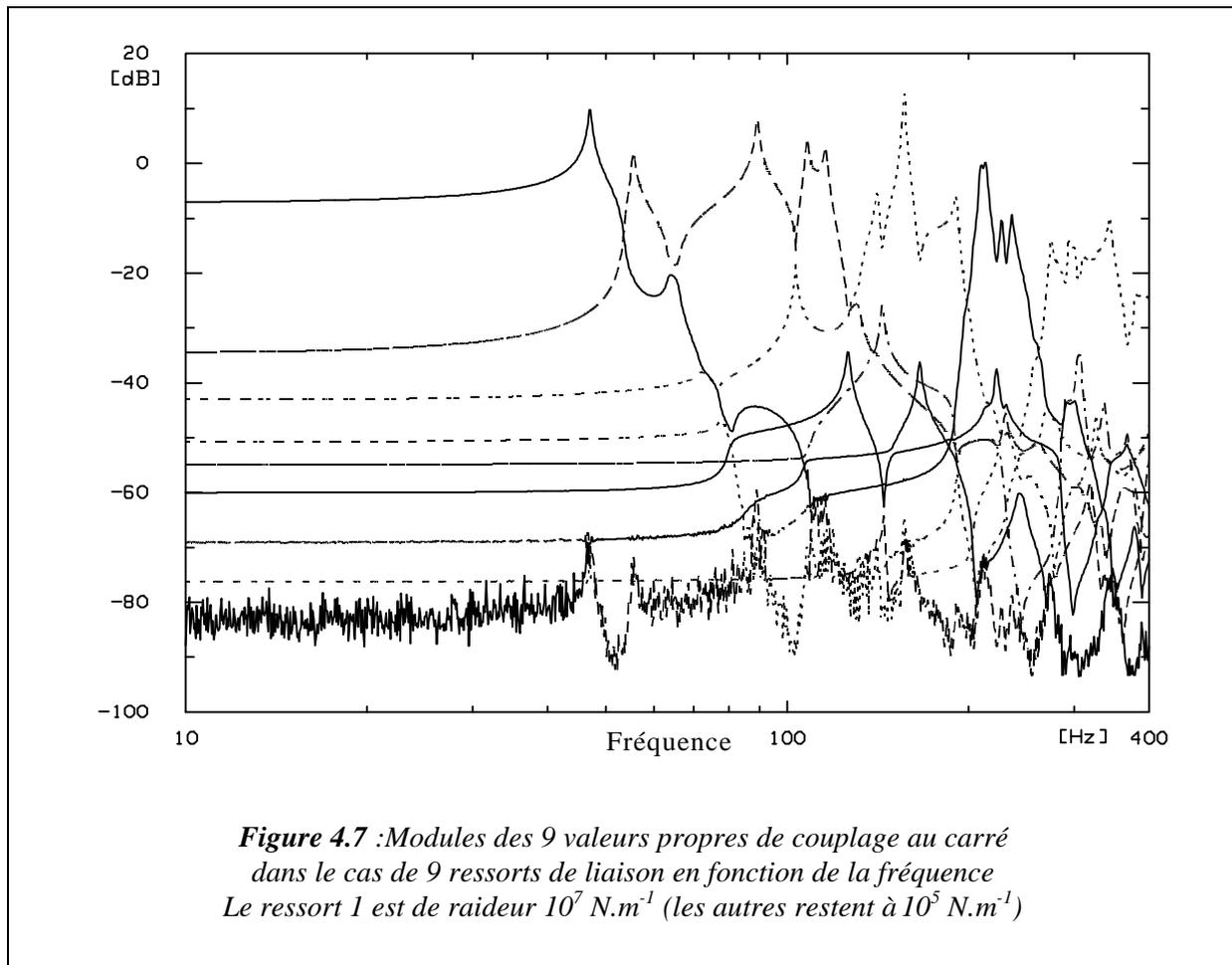


Il est utile de rappeler que tous les ressorts utilisés dans ce cas de figure sont de même raideur, ce qui constitue incontestablement une configuration défavorable, par rapport au cas où un des ressorts serait de raideur sensiblement supérieure aux autres. Malgré cela, la méthode simplifiée démontre une grande efficacité.

Remarque

Une configuration plus favorable est étudiée maintenant. Elle comporte le même nombre de ressorts, mais l'un d'eux est de raideur 100 fois supérieure. La Figure 4.7 montre les modules des valeurs propres de couplage mises en ordre. Il apparaît que par rapport à la Figure 4.3, la domination d'une valeur propre de couplage est beaucoup plus marquée : les

zones de domination sont plus étendues, bien qu'il y ait toujours les croisements. La conséquence directe est que moins il y a de croisements, plus l'hypothèse d'une valeur propre de couplage dominante est vérifiée. La comparaison des solutions en vitesse de la plaque 2, obtenues par la solution de référence, et la solution simplifiée optimisée et la solution obtenue par troncature ne sera pas montrée pour la bonne raison que toutes les courbes sont confondues. Cela signifie tout simplement qu'il y a un chemin réellement et largement dominant et qu'apparemment, cela se comporte comme deux plaques couplées par un seul ressort.



4.2.4. Contrôle du chemin de transmission dominant

La résolution en vitesse consiste en une sommation linéaire des contributions de chaque quantité propre globale, en plus de la vitesse des systèmes découplés bloqués. Bien que ces quantités propres ne soient pas individuellement reliées au ressorts, on suppose qu'il est possible de maîtriser la contribution des valeurs propres de couplage. Cela peut signifier que l'on force telle ou telle coefficient ρ_i à prendre une valeur nulle. Ainsi, par une démarche

inverse de la méthode simplifiée, on effectue une résolution où l'on prend en compte tous les chemins, à l'exception du chemin modal dominant.

Le résultat issu du calcul de la méthode de référence et de la sommation tronquée de sa plus grande contribution est montré en Figure 4.8. Il est effectué dans le cas de 9 ressorts de raideur identique, et la vitesse quadratique moyenne de la plaque 2 non excitée est présentée (cf. données numériques de l'Annexe 3).

Il est indubitable qu'enlever le chemin dominant de la résolution en vitesse procure un gain d'isolement très important sur la vitesse de la plaque réceptrice. Cet isolement, qui est défini par la différence entre le niveau de vitesse quand la plaque est couplée normalement et celui quand le premier chemin n'est pas pris en compte, est particulièrement performant aux fréquences basses. C'était un résultat prévisible dans la mesure où la résolution simplifiée était particulièrement performante dans cette zone de fréquence, (dû au fait que l'hypothèse d'un chemin dominant était vérifiée). Ce premier chemin étant très important dans cette zone de fréquence, sa suppression procure donc un gain important, c'est-à-dire jusqu'à 50 dB (cf. Figure 4.9).

Au contraire, la zone des fréquences plus hautes ne vérifiant que moyennement la condition d'un seul chemin dominant, l'isolement est relativement faible. On retrouve les mêmes tendances que pour la résolution simplifiée, avec d'excellents résultats aux basses fréquences, et une dégradation de la performance au fur et à mesure que la fréquence augmente.

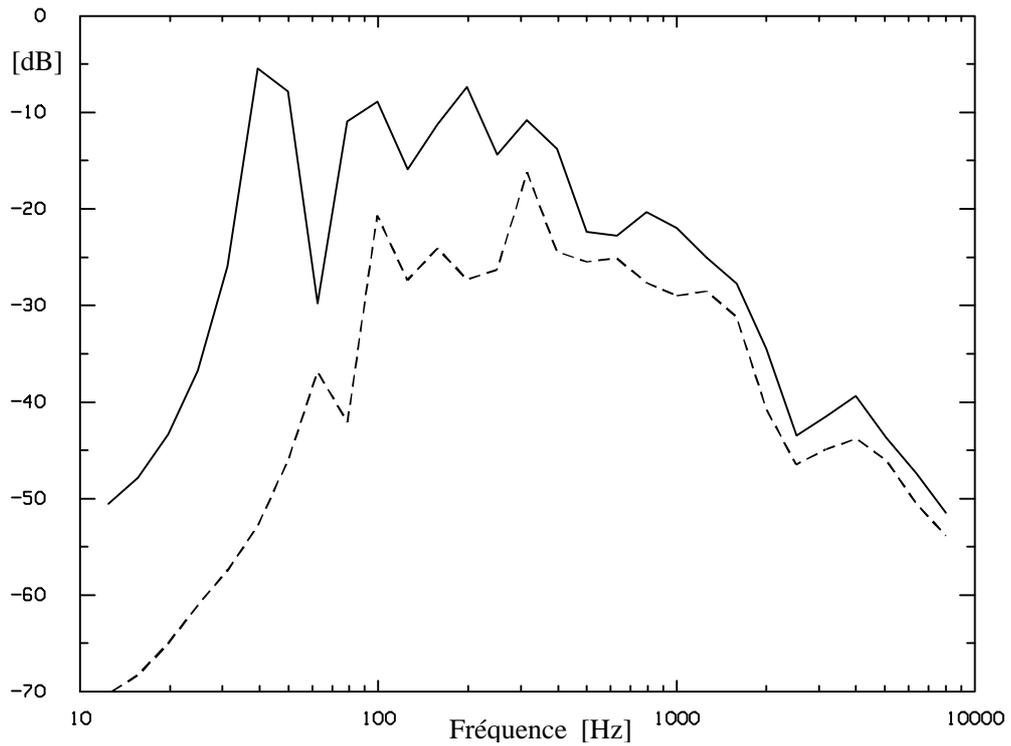


Figure 4.8 : Vitesse de la plaque 2 en fonction de la fréquence
 Vitesse de référence (—) ; vitesse dont le chemin dominant est supprimé (- - -)

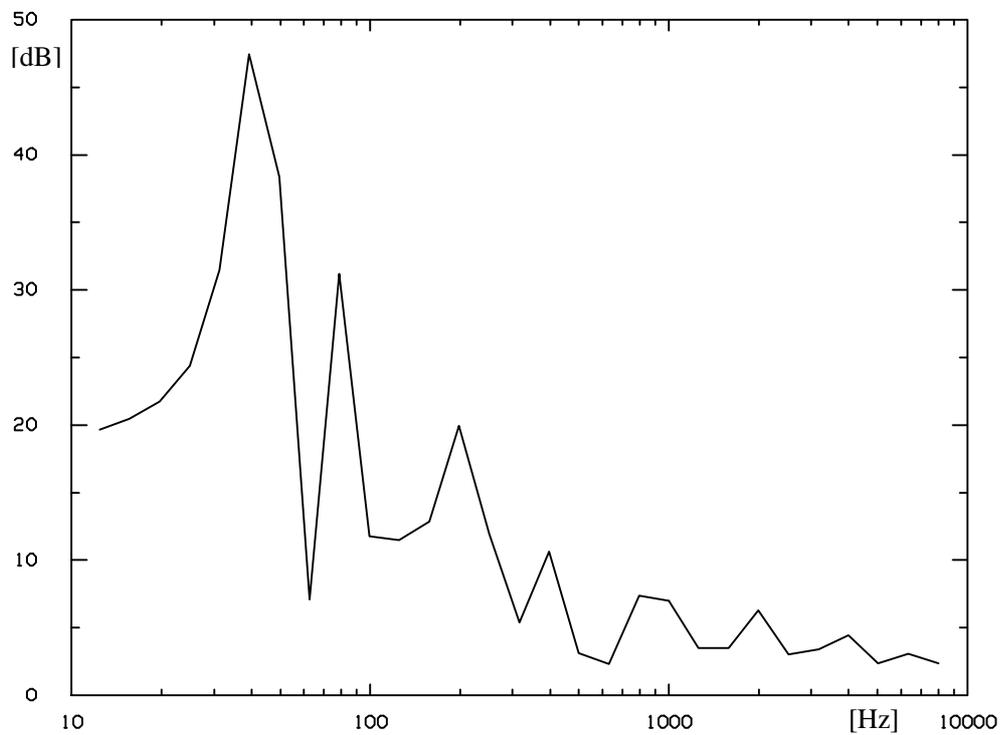


Figure 4.9 : Isolement procuré par la suppression du chemin dominant de la vitesse de la plaque 2, par rapport à la solution de référence, en fonction de la fréquence

4.3. CALCUL DE LA REPOSE EN VITESSE DES PLAQUES A PARTIR DES QUANTITES PROPRES DE COUPLAGE ISOLEES

Cette méthode de résolution est globalement identique à celle du § 4.1 précédent. La différence vient de ce que l'on ne dispose pas dès le départ des quantités propres globales mais des quantités propres isolées. Dans le cas de l'approche expérimentale (qui fournit presque directement ces valeurs propres de couplage isolées), c'est une méthode très utile pour la recombinaison complète de la vitesse des plaques.

L'Eq. 4.16 constitue le point de départ de la résolution. La matrice de couplage globale est constituée de la somme des matrices de couplage isolées (cf. Eq. 4.15). On peut donc écrire, en distribuant la multiplication :

$$\begin{aligned} \begin{matrix} \hat{\mathbf{i}}_{\bar{w}_1} \ddot{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{i}}_{\bar{w}_2} \ddot{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{i}}_{\bar{w}_2} \ddot{\mathbf{p}} \end{matrix} &= \begin{matrix} \hat{\mathbf{i}}_{\bar{w}_{o1}} \ddot{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{i}}_{\bar{w}_{o2}} \ddot{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{i}}_{\bar{w}_{o2}} \ddot{\mathbf{p}} \end{matrix} + \sum_{j=1}^{N_k} \begin{matrix} \hat{\mathbf{a}}_{C_j} \hat{\mathbf{i}}_{\bar{w}_1} \ddot{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{a}}_{C_j} \hat{\mathbf{i}}_{\bar{w}_2} \ddot{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{a}}_{C_j} \hat{\mathbf{i}}_{\bar{w}_2} \ddot{\mathbf{p}} \end{matrix} \\ &= \begin{matrix} \hat{\mathbf{i}}_{\bar{w}_{o1}} \ddot{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{i}}_{\bar{w}_{o2}} \ddot{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{i}}_{\bar{w}_{o2}} \ddot{\mathbf{p}} \end{matrix} + \sum_{j=1}^{N_k} \begin{matrix} \hat{\mathbf{a}}_{C_j} \hat{\mathbf{i}}_{\bar{w}_1} \ddot{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{a}}_{C_j} \hat{\mathbf{i}}_{\bar{w}_2} \ddot{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{a}}_{C_j} \hat{\mathbf{i}}_{\bar{w}_2} \ddot{\mathbf{p}} \end{matrix} \end{aligned}$$

Eq. 4.45

La matrice $\overline{\overline{C}}_j$ projette le vecteur vitesse selon la direction du $j^{\text{ème}}$ vecteur propre de couplage isolé. On peut toujours noter le vecteur propre comme la combinaison du vecteur propre isolé $\{\bar{\varphi}_j\}$ et d'un résidu :

$$\begin{matrix} \hat{\mathbf{i}}_{\bar{w}_1} \ddot{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{i}}_{\bar{w}_2} \ddot{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{i}}_{\bar{w}_2} \ddot{\mathbf{p}} \end{matrix} = \begin{matrix} \hat{\mathbf{i}}_{\bar{R}_{1j}} \ddot{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{i}}_{\bar{R}_{2j}} \ddot{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{i}}_{\bar{R}_{2j}} \ddot{\mathbf{p}} \end{matrix} + \begin{matrix} \hat{\mathbf{i}}_{\alpha_{1j}} \bar{\varphi}_{1j} \ddot{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{i}}_{\alpha_{2j}} \bar{\varphi}_{2j} \ddot{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{i}}_{\alpha_{2j}} \bar{\varphi}_{2j} \ddot{\mathbf{p}} \end{matrix}, \quad \hat{\mathbf{j}} \in [1..N_k]$$

Eq. 4.46

Ce vecteur résidu appartient au noyau de l'application représentée par la $j^{\text{ème}}$ matrice de couplage isolée. A ce titre, on a $\overline{\overline{C}}_j \{\bar{\mathbf{R}}_j\} = \{\bar{\mathbf{0}}\}$ et l'action de la $j^{\text{ème}}$ matrice de couplage sur le vecteur vitesse fait apparaître la valeur propre de couplage associée et la permutation des coefficients propres α_i :

$$\overline{\overline{C}}_j \begin{matrix} \hat{\mathbf{i}}_{\bar{w}_1} \ddot{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{i}}_{\bar{w}_2} \ddot{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{i}}_{\bar{w}_2} \ddot{\mathbf{p}} \end{matrix} = \lambda_j \begin{matrix} \hat{\mathbf{i}}_{\alpha_{2j}} \bar{\varphi}_{1j} \ddot{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{i}}_{\alpha_{1j}} \bar{\varphi}_{2j} \ddot{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{i}}_{\alpha_{1j}} \bar{\varphi}_{2j} \ddot{\mathbf{p}} \end{matrix}$$

Eq. 4.47

Ce processus, réitéré pour toutes les matrices de couplage isolées dans le cadre de l'Eq. 4.45, conduit à :

$$\mathbf{\dot{a}} \mathbf{C}_j \begin{matrix} \mathbf{\dot{w}}_1 \mathbf{\ddot{u}} \\ \mathbf{\dot{w}}_2 \mathbf{\dot{y}} \end{matrix} = \mathbf{\dot{a}} \lambda_j \begin{matrix} \mathbf{\dot{\alpha}}_{2j} \bar{\Phi}_{1j} \mathbf{\ddot{u}} \\ \mathbf{\dot{\alpha}}_{1j} \bar{\Phi}_{2j} \mathbf{\dot{y}} \end{matrix}$$

Eq. 4.48

L'Eq. 4.45 devient alors, compte tenu de l'Eq. 4.47 :

$$\begin{matrix} \mathbf{\dot{w}}_1 \mathbf{\ddot{u}} \\ \mathbf{\dot{w}}_2 \mathbf{\dot{y}} \end{matrix} = \begin{matrix} \mathbf{\dot{w}}_{o1} \mathbf{\ddot{u}} \\ \mathbf{\dot{w}}_{o2} \mathbf{\dot{y}} \end{matrix} + \mathbf{\dot{a}} \lambda_j \begin{matrix} \mathbf{\dot{\alpha}}_{2j} \bar{\Phi}_{1j} \mathbf{\ddot{u}} \\ \mathbf{\dot{\alpha}}_{1j} \bar{\Phi}_{2j} \mathbf{\dot{y}} \end{matrix}$$

Eq. 4.49

Cette équation montre que l'ensemble des N_k quantités propres de couplage isolées peut rendre compte de la contribution du couplage, de la même manière que les N_k quantités propres de couplage globales décrivent le couplage (cf. Eq. 4.20).

On cherche maintenant à déterminer les coefficients propres α_i . Le produit de la $k^{\text{ème}}$ matrice de couplage isolée sur l'expression de la vitesse des systèmes couplés de l'Eq. 4.48, mène à :

$$\mathbf{C}_k \begin{matrix} \mathbf{\dot{w}}_1 \mathbf{\ddot{u}} \\ \mathbf{\dot{w}}_1 \mathbf{\dot{y}} \end{matrix} = \mathbf{C}_k \begin{matrix} \mathbf{\dot{w}}_{o1} \mathbf{\ddot{u}} \\ \mathbf{\dot{w}}_{o1} \mathbf{\dot{y}} \end{matrix} + \mathbf{\dot{a}} \lambda_j \mathbf{C}_k \begin{matrix} \mathbf{\dot{\alpha}}_{2j} \bar{\Phi}_{1j} \mathbf{\ddot{u}} \\ \mathbf{\dot{\alpha}}_{1j} \bar{\Phi}_{2j} \mathbf{\dot{y}} \end{matrix}$$

Eq. 4.50

Là encore, la $k^{\text{ème}}$ matrice de couplage isolée appliquée aux vecteurs vitesses couplée et découplée bloquée les projette selon la direction du $k^{\text{ème}}$ vecteur propre de couplage isolé. De plus, grâce à la propriété donnée au § 4.5.2 qui permet d'exprimer un vecteur propre de couplage isolé en fonction d'un autre vecteur propre de couplage isolé au moyen de coefficients de correspondance⁸ b_{kij} , on arrive à :

$$\lambda_k \begin{matrix} \mathbf{\dot{\alpha}}_{2k} \bar{\Phi}_{1k} \mathbf{\ddot{u}} \\ \mathbf{\dot{\alpha}}_{1k} \bar{\Phi}_{2k} \mathbf{\dot{y}} \end{matrix} = \lambda_k \begin{matrix} \mathbf{\dot{\alpha}}_{o2k} \bar{\Phi}_{1k} \mathbf{\ddot{u}} \\ \mathbf{\dot{\alpha}}_{o1k} \bar{\Phi}_{2k} \mathbf{\dot{y}} \end{matrix} + \mathbf{\dot{a}} \lambda_j \lambda_k \begin{matrix} \mathbf{\dot{\alpha}}_{1j} b_{2jk} \bar{\Phi}_{1k} \mathbf{\ddot{u}} \\ \mathbf{\dot{\alpha}}_{2j} b_{1jk} \bar{\Phi}_{2k} \mathbf{\dot{y}} \end{matrix}$$

Eq. 4.51

La simplification par λ_k et la mise en facteur des vecteurs propres de couplage isolés fournit les $2N_k$ systèmes d'équations suivant qui permettent de déterminer les coefficients propres α_i à partir des coefficients propres découplés bloqués α_{oi} (cf. § 4.5.1 pour la définition des α_{oi}) :

⁸ Le § A4.1 de l'Annexe 4 décrit le calcul complet d'obtention de ces coefficients de correspondance.

$$\begin{aligned} \begin{matrix} \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{i}} \end{matrix} \alpha_{1k} &= \alpha_{o1k} + \hat{\mathbf{a}} \sum_{j=1}^{N_k} \lambda_j \alpha_{2j} b_{1jk} \\ \begin{matrix} \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{i}} \end{matrix} \alpha_{2k} &= \alpha_{o2k} + \hat{\mathbf{a}} \sum_{j=1}^{N_k} \lambda_j \alpha_{1j} b_{2jk} \end{aligned} \quad \text{pour } \hat{\mathbf{i}} [1..N_k]$$

Eq. 4.52

On définit des vecteurs de coefficients propres $\{\hat{\alpha}\}$ et $\{\hat{\alpha}_o\}$, chacun de dimension $(2N_k)$. On peut reformuler l'Eq. 4.52 sous forme matricielle, ces deux vecteurs étant reliés par une matrice $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ de dimensions $(2N_k \times 2N_k)$:

$$\begin{aligned} \begin{matrix} \hat{\mathbf{e}}_{D_{11}} \\ \hat{\mathbf{e}}_{D_{12}} \\ \hat{\mathbf{e}}_{D_{21}} \end{matrix} \overline{\overline{\mathbf{D}}} & \begin{matrix} \overline{\overline{\mathbf{D}}}_{12} \\ \overline{\overline{\mathbf{D}}}_{22} \end{matrix} \begin{matrix} \hat{\mathbf{u}}_1 \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\mathbf{u}}_2 \hat{\alpha}_2 \end{matrix} \hat{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{y}} = \begin{matrix} \hat{\mathbf{i}} \hat{\alpha}_{o1} \\ \hat{\mathbf{i}} \hat{\alpha}_{o2} \end{matrix} \hat{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

Eq. 4.53

Les termes génériques de cette matrice s'expriment comme suit :

$$\begin{aligned} (D_{11})_{ij} &= (D_{22})_{ij} = \delta_{ij} \\ (D_{12})_{ij} &= -\lambda_j b_{1ji} \\ (D_{21})_{ij} &= -\lambda_j b_{2ji} \end{aligned}$$

Eq. 4.54

Cette forme de résolution est très pratique dans le cadre de l'approche expérimentale. En effet, les valeurs propres de couplage isolées sont directement accessibles par la mesure, ainsi que les coefficients de correspondance b_{kij} . De cette manière, le calcul des composantes de la matrice $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ est aisé, comme l'est alors la recombinaison de l'Eq. 4.48.

Notons que l'on peut extraire de la matrice $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$, une matrice de même forme que la matrice de couplage (nommée $\overline{\overline{\mathbf{C}_D}}$) telle que :

$$\begin{aligned} \begin{matrix} \hat{\mathbf{e}}_{D_{11}} \\ \hat{\mathbf{e}}_{D_{12}} \\ \hat{\mathbf{e}}_{D_{21}} \end{matrix} \overline{\overline{\mathbf{D}}} & \begin{matrix} \overline{\overline{\mathbf{D}}}_{12} \\ \overline{\overline{\mathbf{D}}}_{22} \end{matrix} \begin{matrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}} \end{matrix} \begin{matrix} \hat{\mathbf{e}}_1 \\ \hat{\mathbf{e}}_0 \end{matrix} \begin{matrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}} \end{matrix} \begin{matrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_{D_{21}} \end{matrix} \begin{matrix} \overline{\overline{\mathbf{C}_D}} \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}} \end{matrix} \end{aligned}$$

4.4. RESOLUTION SIMPLIFIEE BASEE SUR LE CHEMIN PHYSIQUE DOMINANT

De la même manière que la sommation linéaire des contributions du couplage de l'Eq. 4.20 a inspiré la résolution simplifiée basée sur le chemin modal dominant, l'Eq. 4.49 donne l'idée d'une résolution simplifiée. Cette fois, elle est basée sur le chemin physique dominant puisque chaque valeur propre de couplage isolée λ_i et chaque vecteur propre de couplage isolé $\{\bar{\phi}_i\}$ correspondent à un ressort particulier. Il est évident que le résultat d'une résolution simplifiée par ce biais ne peut donner d'aussi bons résultats que dans le cas du chemin modal puisque seules les quantités propres de couplage globales sont aptes à rendre effectivement compte des échanges par le couplage. En revanche, dans le cas particulier d'une raideur de couplage grande devant les autres, et donc d'un chemin physique prépondérant, les deux méthodes simplifiées produisent des résultats voisins.

4.4.1. Cas 1 : un des ressorts est 10 fois plus raide que les autres

On se place dans ce cas où l'un des ressorts est de raideur 10 fois supérieure aux autres ressorts. A partir des données numériques de l'Annexe 3, cela signifie que tous les ressorts sont de raideur 10^5 N.m^{-1} sauf un qui est de raideur 10^6 N.m^{-1} .

Les Figure 4.10 et Figure 4.11 montrent les 9 valeurs propres de couplage respectivement isolées et globales. On constate que les deux types de valeurs propres de couplage ne sont pas de même nature. Les valeurs propres de couplage isolées, de par leur appartenance physique à l'un ou à l'autre des ressorts peuvent être suivies en continu alors que les valeurs propres de couplage globales, issues de multiples recombinaisons (cf. § 4.5.3) se croisent sans cesse.

Il faut aussi noter que les deux courbes n'atteignent pas les 0 dB, signe d'un couplage faible et décroissent en fonction de la fréquence selon une pente de 3 dB par octave (cf. § 3.3.1).

Mais la constatation primordiale à faire est que dans les deux cas, au fur et à mesure que la fréquence augmente, une valeur propre de couplage se met à dominer les autres. Au-delà de 800 Hz, les deux valeurs propres de couplage dominantes sont d'ailleurs quasiment confondues, ce que l'on peut voir sur la Figure 4.12. Dans ces conditions, la résolution simplifiée a été mise en œuvre. Elle consiste en une simple troncature de la résolution décrite au § 4.3. sur le critère de la valeur propre de couplage dominante. Comme dans le cas traité ici les valeurs propres de couplage sont toujours inférieures à un, le critère a consisté à choisir la valeur propre de couplage de plus grand module.

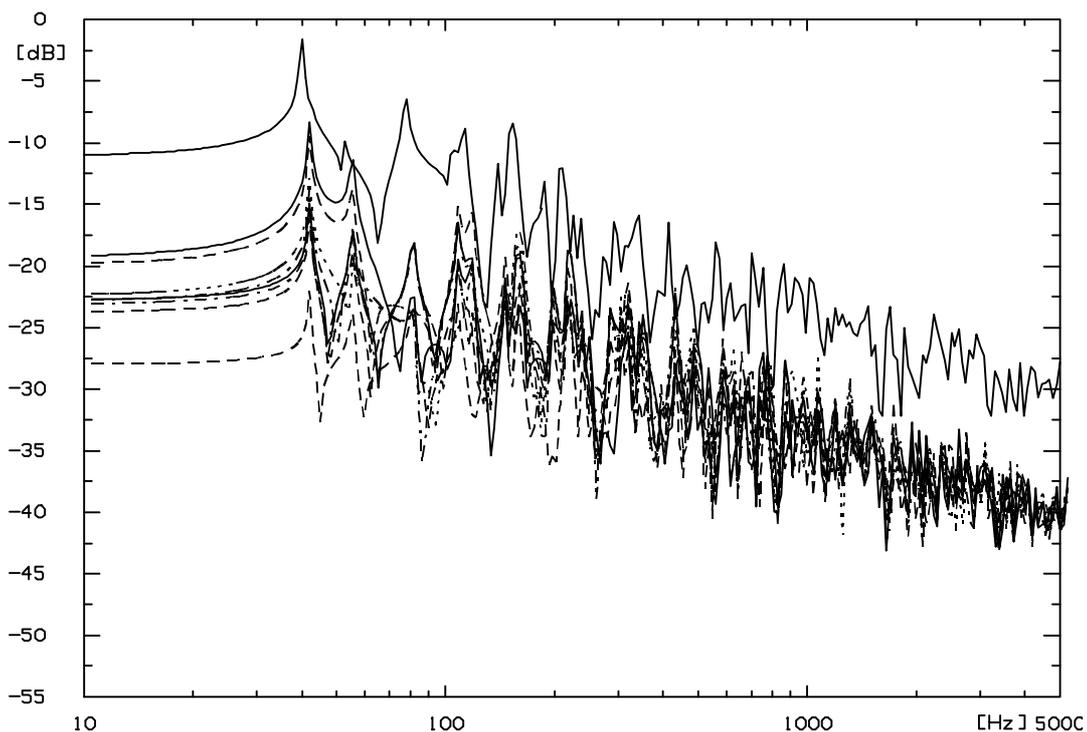


Figure 4.10 : Modules des valeurs propres de couplage *isolées* en fonction de la fréquence un ressort est de raideur 10^6 N.m^{-1} , les 8 autres de raideur 10^5 N.m^{-1} .

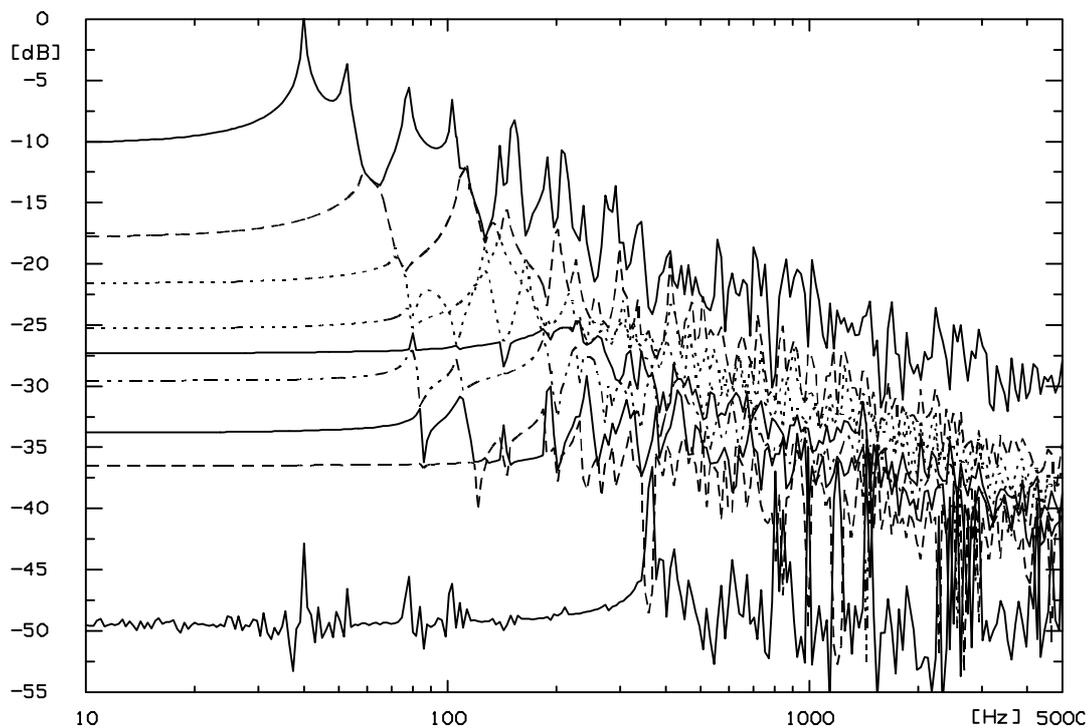
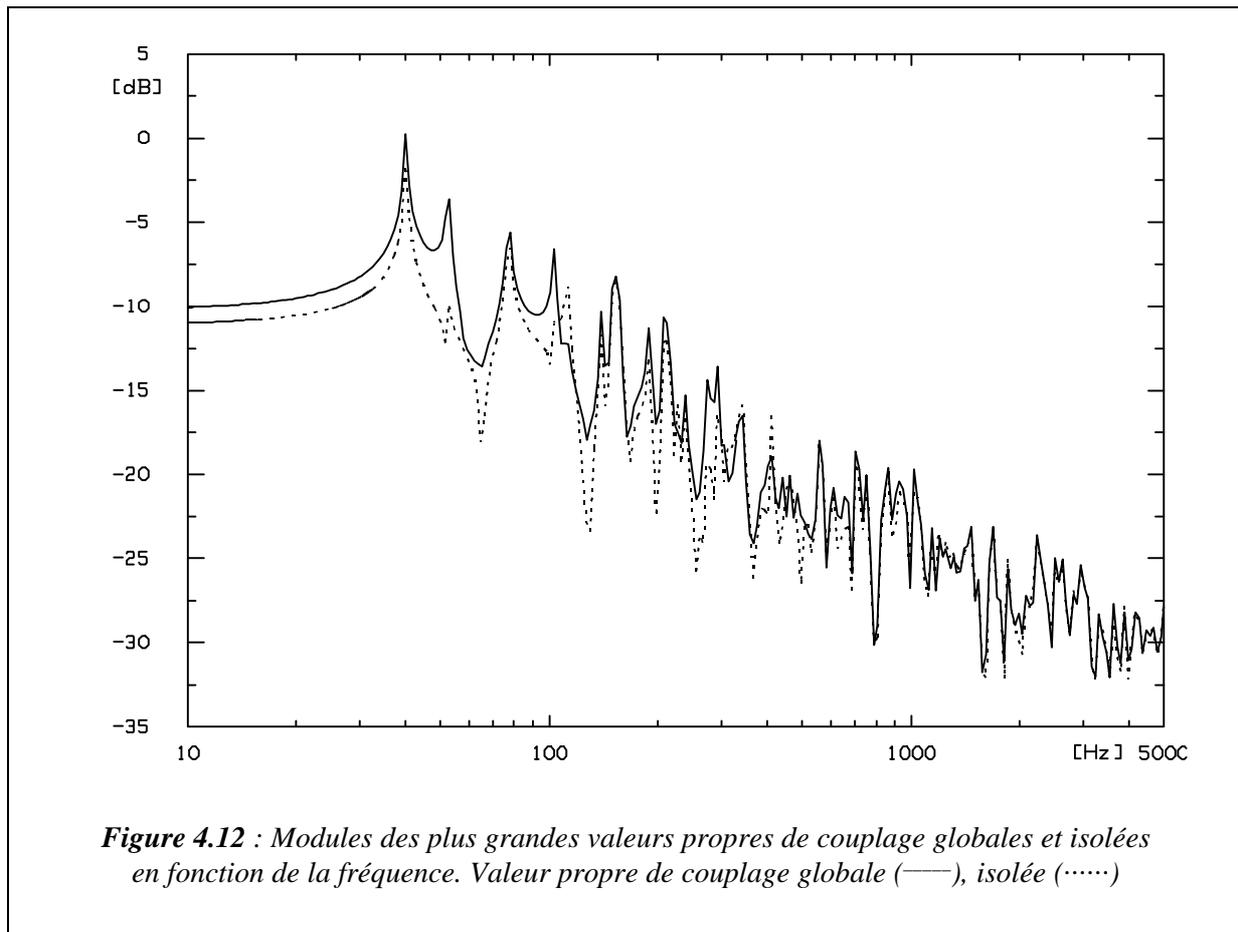


Figure 4.11 : Modules des valeurs propres de couplage *globales* en fonction de la fréquence un ressort est de raideur 10^6 N.m^{-1} , les 8 autres de raideur 10^5 N.m^{-1} .



La Figure 4.13 montre la vitesse de la plaque 2 non excitée (dans une représentation en bandes fines) obtenue par résolution simplifiée comparée à la solution de référence. Comme dans le § 4.2, on peut observer quelques sous-estimations au niveau des anti-résonances mais l'allure de la vitesse obtenue par la méthode simplifiée diffère sensiblement de la référence dans la zone 10-300 Hz. Là, on remarque des décalages des fréquences des pics, ainsi que des mésestimations importantes de niveau. Ces problèmes sont à mettre en parallèle avec la représentation des valeurs propres de couplage (cf. Figure 4.12) où de grosses différences sont mises en évidence dans la zone 10-300 Hz.

La Figure 4.14 compare les mêmes courbes mais dans une représentation en tiers d'octaves. Pour fixer les idées, on a ajouté la vitesse obtenue par la méthode simplifiée basée sur le chemin modal dominant (solution obtenue par troncature ici aussi). On constate que la résolution sur le chemin physique dominant donne un résultat certes un peu moins bon que dans le cas du chemin modal dominant, mais prédit quand même la vitesse de la plaque avec une excellente précision au dessus de 300 Hz.

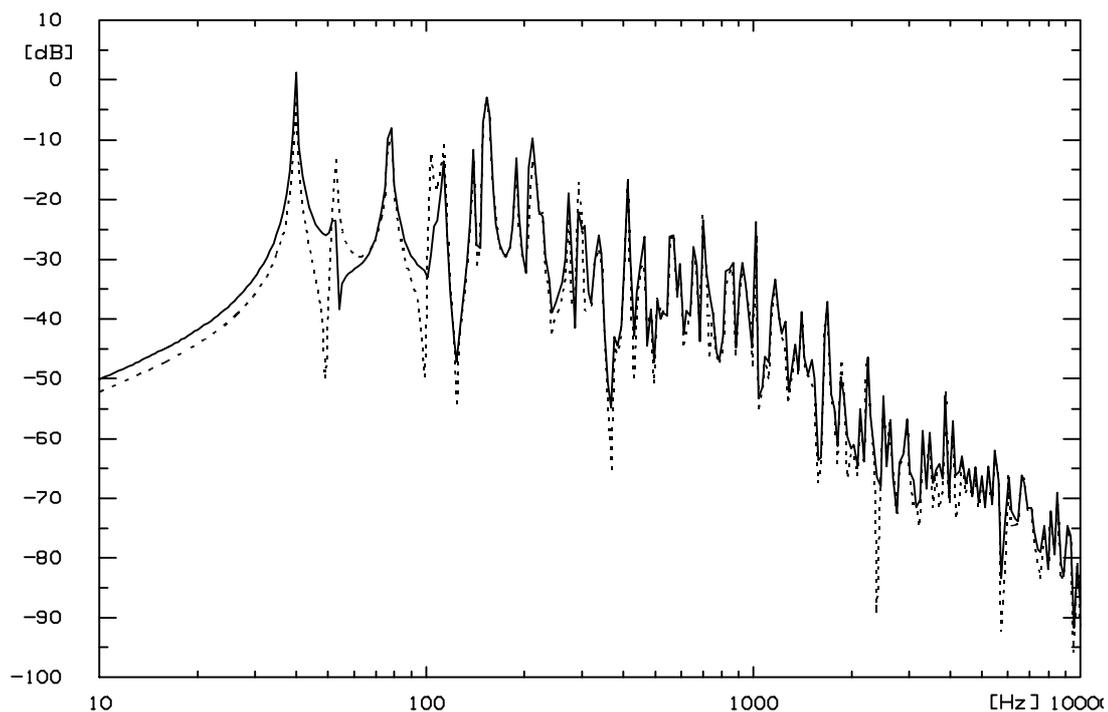


Figure 4.13 : Vitesse de la plaque 2 en fonction de la fréquence. Référence (—) ; simplifiée sur le chemin physique dominant (·····). 8 ressorts de raideur 10^5 N.m^{-1} , un de raideur 10^6 N.m^{-1} .

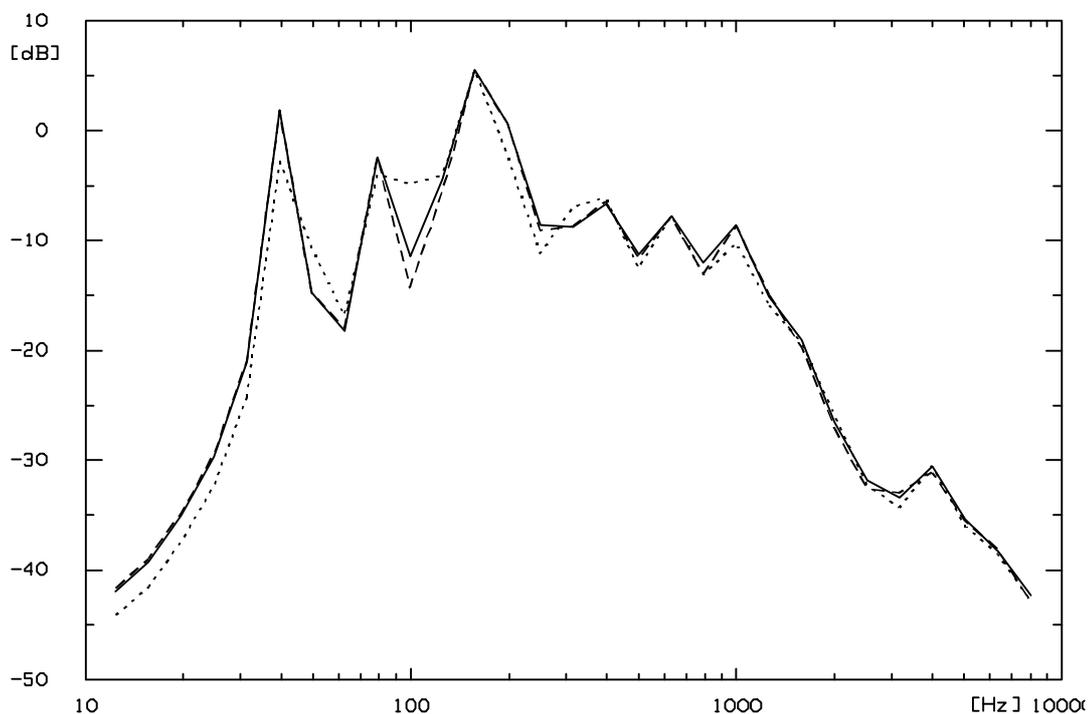
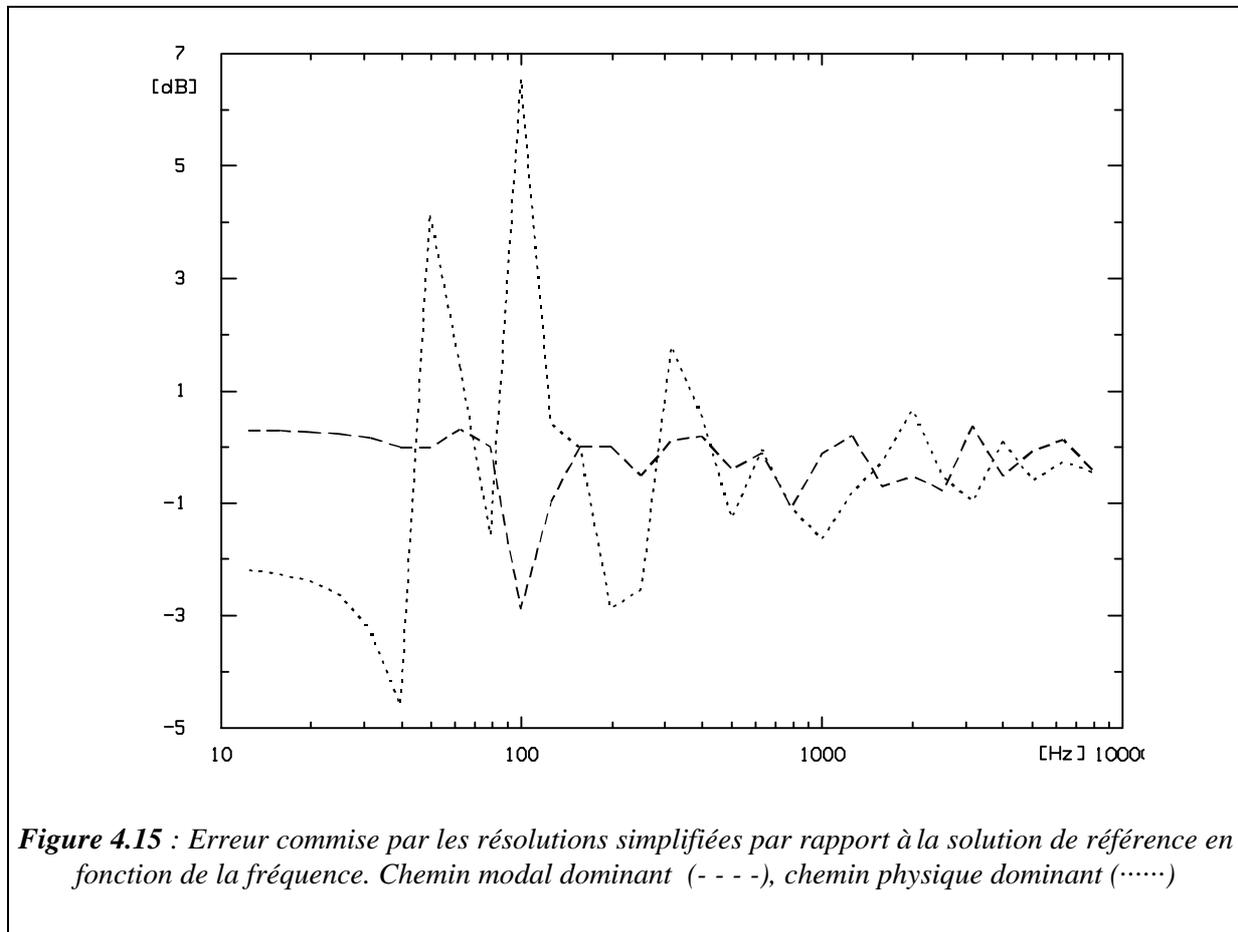


Figure 4.14 : Vitesse de la plaque 2 (tiers d'octave) en fonction de la fréquence. Référence (—) ; simplifiée sur le chemin modal dominant (- - -), simplifiée sur le chemin physique dominant (·····). 8 ressorts de raideur 10^5 N.m^{-1} , un de raideur 10^6 N.m^{-1} .

Dès les 400 Hz atteints, on observe une excellente similitude entre la vitesse de référence et celle obtenue par la résolution simplifiée sur le chemin physique dominant. D'ailleurs, la marge d'erreur, présentée en Figure 4.15, montre que les deux méthodes commettent une erreur très faible (et de même ordre c'est-à-dire ± 1 dB) à partir de 400 Hz.



4.4.2. Cas 2 : tous les ressorts sont de raideur identique

On se place maintenant dans le cas où tous les ressorts sont de même raideur, c'est-à-dire 10^5 N.m^{-1} , selon les données disponibles en Annexe 3. Ce cas est le plus défavorable possible puisqu'alors, les valeurs propres de couplage isolées ne se différencieront que sur la valeur de la mobilité d'entrée des plaques au point de connexion du ressort considéré. Sur l'ensemble de la plage fréquentielle, il n'y a aucune raison pour qu'une valeur propre de couplage isolée domine largement les autres, et par conséquent, pour que la résolution simplifiée sur le chemin physique dominant donne un résultat précis. Néanmoins, on présente maintenant les résultats obtenus dans cette configuration.

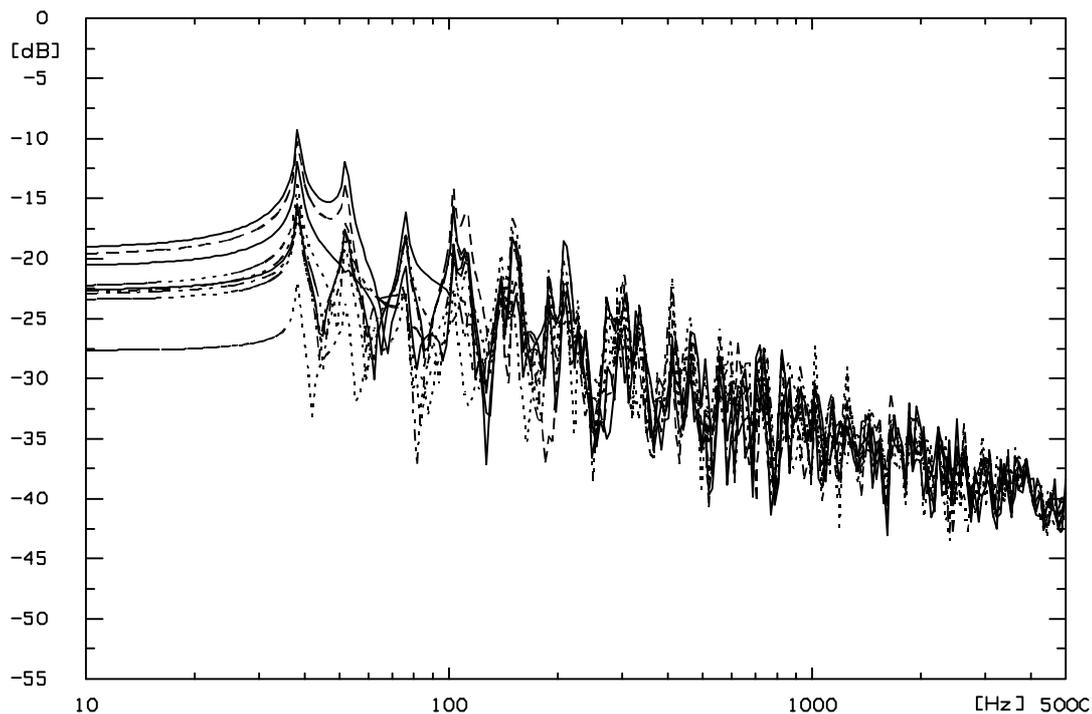


Figure 4.16 : Module des valeurs propres de couplage isolées en fonction de la fréquence
Tous les ressorts sont de raideur 10^5 N.m^{-1} .

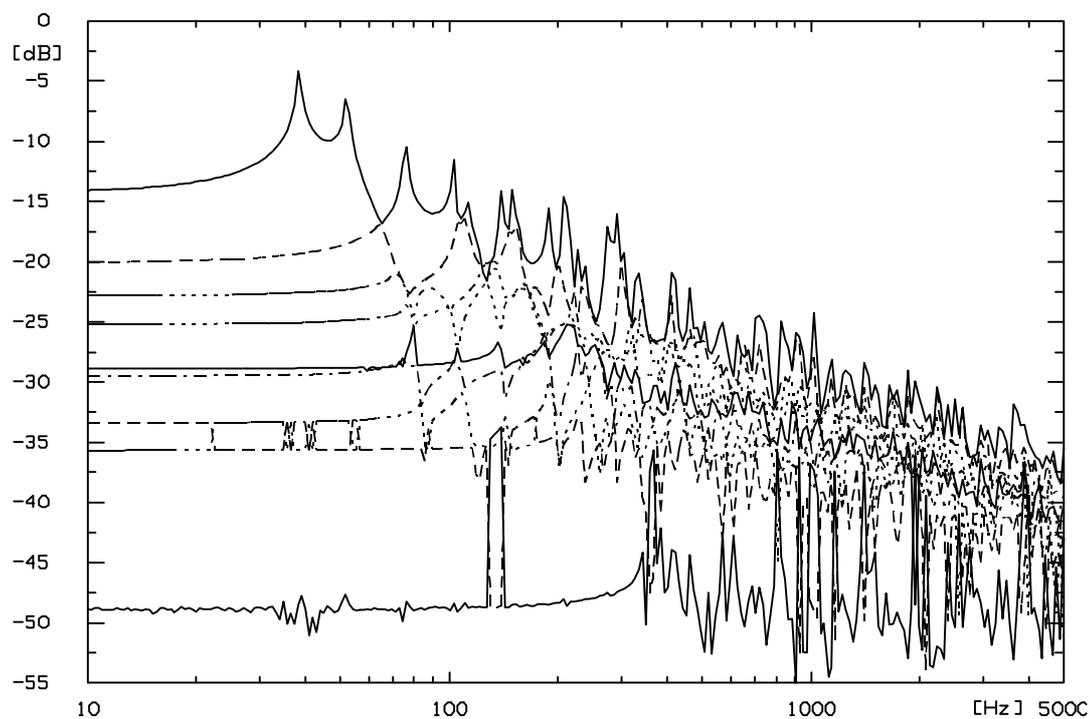


Figure 4.17 : Module des valeurs propres de couplage globales en fonction de la fréquence
Tous les ressorts sont de raideur 10^5 N.m^{-1} .

La Figure 4.16 montre les valeurs propres de couplage isolées quand tous les ressorts sont de même raideur. On constate la grande similitude de forme de toutes ces valeurs propres de couplage : aucune valeur propre ne domine les autres, elle sont toutes à peu près du même niveau.

La Figure 4.17 montre les valeurs propres de couplage globales dans la même configuration. Comme dans le cas traité auparavant, on note la différence de dynamique entre les deux types de valeurs propres de couplage ; celle des valeurs propres de couplage isolées reste dans un canal assez étroit tandis que l'autre couvre une grande gamme dynamique. Dans ce cas, la différence d'importance de deux chemins consécutifs est plus grande et donc la plus grande valeur propre de couplage représente au mieux la transmission entre les plaques.

D'ailleurs, les valeurs propres de couplage globales présentent toujours des zones où une valeur propre domine les autres, ce qui a une influence immédiate sur la qualité de la résolution comme l'a montré le § 4.2.

L'application de la résolution simplifiée sur le chemin physique dominant est effectuée ; la Figure 4.18 présente la vitesse de la plaque 2 comparée à la référence. La représentation en bandes fines montre que la résolution simplifiée ne sous-estime pas la réponse de la plaque qu'au niveau des anti-résonances, mais sur l'ensemble du spectre fréquentiel.

Ainsi, la représentation en tiers d'octaves (cf. Figure 4.19) confirme cet état de fait en montrant d'importants déficits de la résolution simplifiée. Dans cette configuration de ressorts de raideur identique, la représentation des valeurs propres de couplage isolées montre que la résolution simplifiée sur le chemin physique dominant s'appuie sur des hypothèses non vérifiées et donc logiquement ne donne pas un résultat raisonnablement exploitable.

L'erreur commise par cette méthode est quand même présentée en Figure 4.20. Les 10 dB d'erreur moyenne sortent de la marge d'erreur acceptable, même pour une résolution simplifiée (alors que la méthode basée sur le chemin modal dominant reste à ± 3 dB).

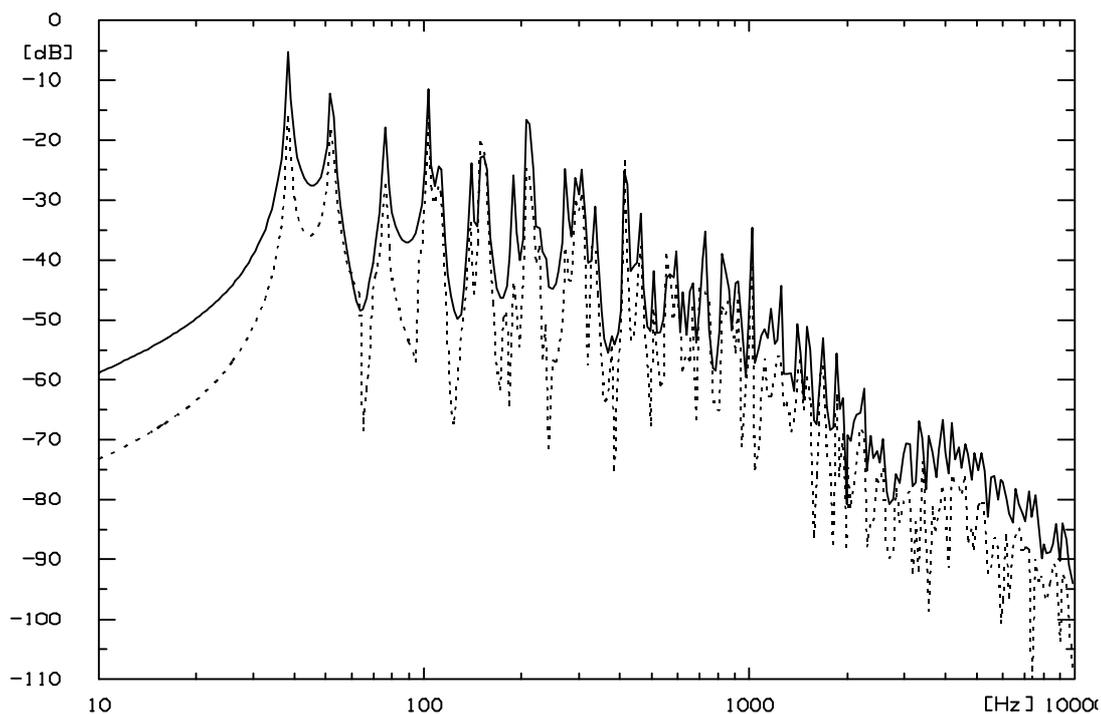


Figure 4.18 : Vitesse de la plaque 2 en fonction de la fréquence. Référence (—) ; simplifiée sur le chemin physique dominant (.....). Tous les ressorts sont de même raideur 10^5 N.m^{-1} .

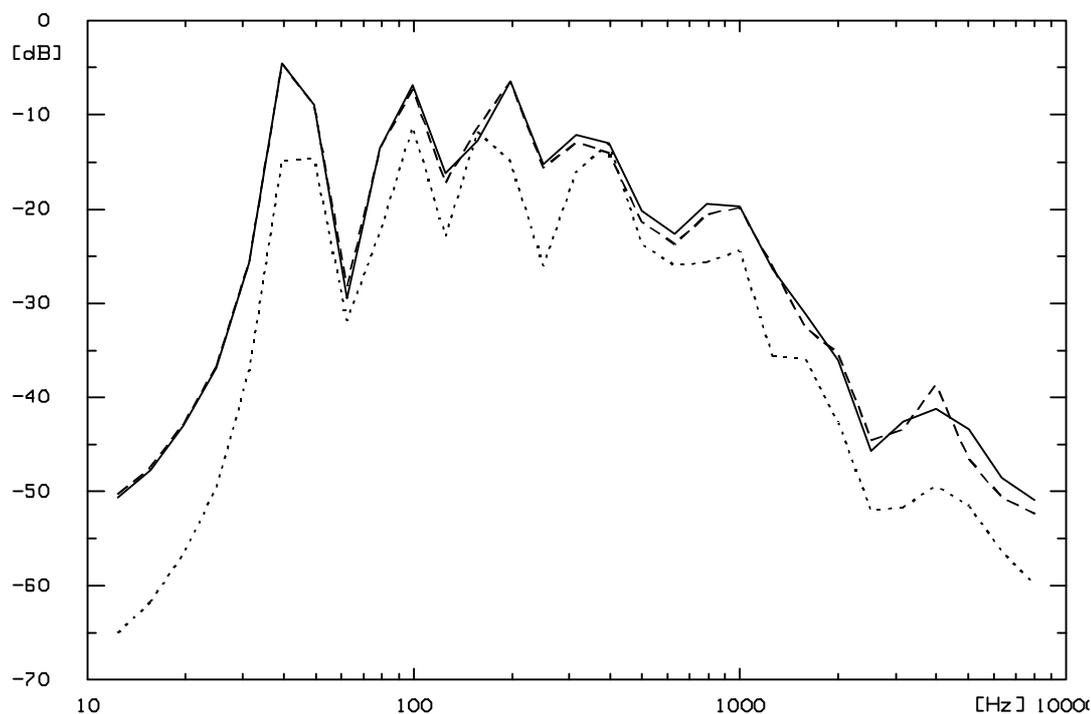
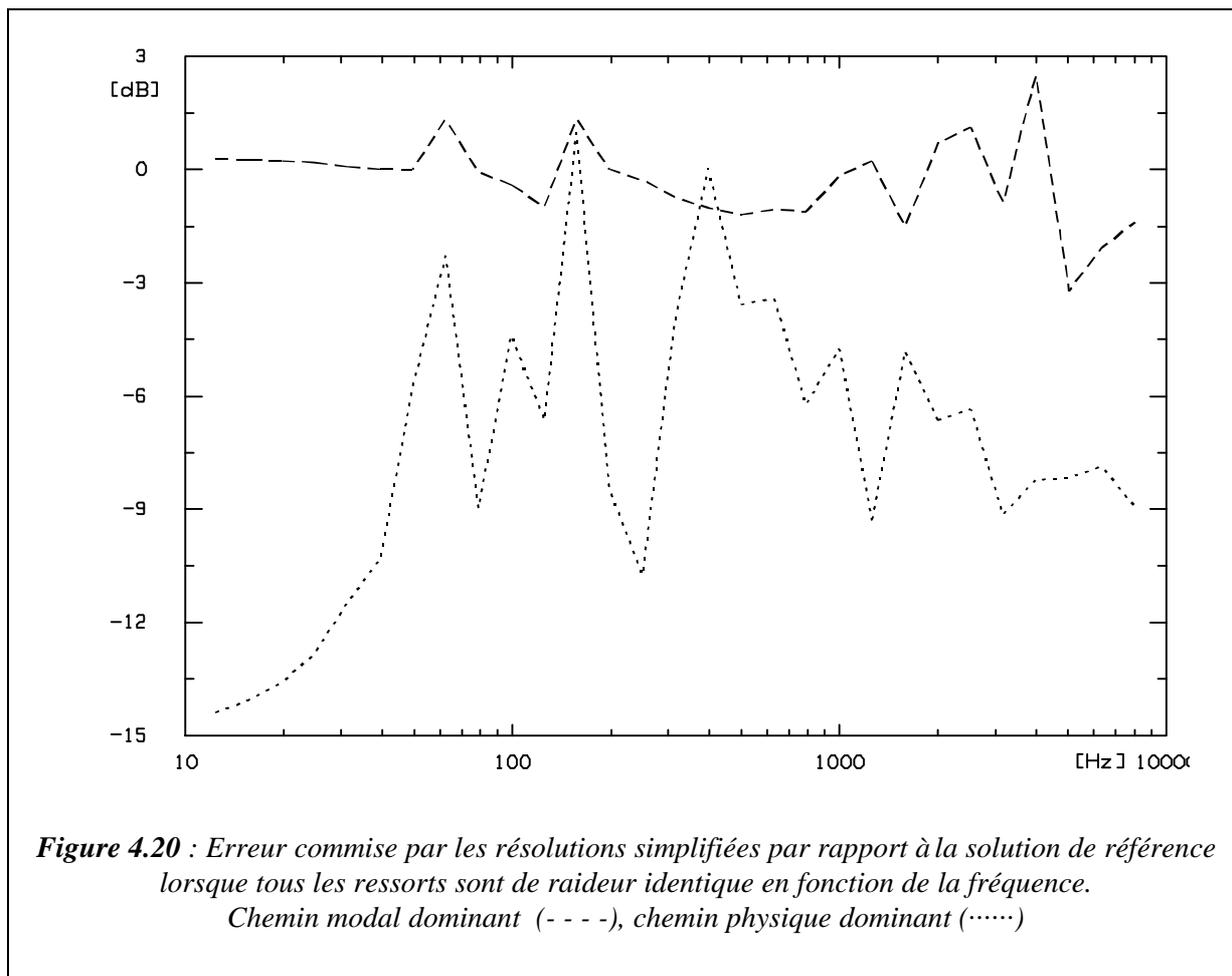


Figure 4.19 : Vitesse de la plaque 2 (tiers d'octave) en fonction de la fréquence. Référence (—) ; simplifiée sur le chemin modal dominant (- - -), simplifiée sur le chemin physique dominant (.....). Tous les ressorts sont de même raideur 10^5 N.m^{-1} .



4.5. RECOMPOSITION DES QUANTITES PROPRES DE COUPLAGE GLOBALES A PARTIR DES QUANTITES PROPRES DE COUPLAGE ISOLEES

Ce paragraphe donne les résultats qui permettent de passer des quantités propres isolées aux quantités propres globales. Ces valeurs de passages sont indispensables si l'on veut effectuer une résolution simplifiée basée sur le chemin modal dominant alors que l'on n'a accès qu'aux quantités propres isolées, ce qui se produit dans le cadre expérimental.

Dans la situation expérimentale, on a aussi besoin de connaître les coefficients propres globaux ρ_i , donc d'un moyen de passer des coefficients isolés α_{oi} aux globaux ρ_{oi} .

Dans tous les cas, il est aussi nécessaire de connaître les coefficients qui permettent d'exprimer n'importe quel vecteur propre de couplage isolé en fonction de n'importe quel autre vecteur propre de couplage isolé.

4.5.1. Valeurs propres et vecteurs propres de couplage isolés

Le § 4.1.3. a donné l'expression de la $j^{\text{ème}}$ matrice de couplage isolée. On note la similitude avec l'expression de la matrice de couplage du chapitre 3, dans le cas du couplage des deux plaques par un seul ressort. La seule différence qui existe entre ces deux expressions vient des bases modales découplées bloquées. Au chapitre 3, un seul ressort bloque la plaque alors que dans le cas présent, ce sont les N_k ressorts.

Le chapitre 3 a montré que l'expression de la valeur propre de couplage ne dépend pas de la base modale utilisée. On en déduit que l'expression de la valeur propre de couplage isolée, correspondant au $j^{\text{ème}}$ ressort actif entre les deux plaques est :

$$\lambda_j = \frac{k_j}{j\omega} \sqrt{Y_1(Q_{1j})Y_2(Q_{2j})}$$

Eq. 4.55

$Y_1(Q_{1j})$ et $Y_2(Q_{2j})$ sont les mobilités découplées bloquées des plaques 1 et 2 considérées aux points de connexion du $j^{\text{ème}}$ ressort. L'expression du vecteur propre de couplage isolé associé est :

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{i}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_{1j} \\ \bar{\Phi}_{2j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{i}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{Y_1(Q_{1j})}} \\ \frac{1}{\sqrt{Y_2(Q_{2j})}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Z}_{11}^{-1} \\ \bar{Z}_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_1(Q_{1j}) \\ \bar{\Psi}_2(Q_{2j}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix}$$

Eq. 4.56

Les coefficients propres isolés des systèmes découplés bloqués α_{oi} sont eux aussi d'expression très similaire à celle donnée au chapitre 3. Ils dépendent de la vitesse des plaques découplées bloquées considérées au point de connexion du $j^{\text{ème}}$ ressort, et des mobilités d'entrée des plaques en ces mêmes points :

$$\left| \begin{array}{l} \alpha_{o1j} = \frac{w_{o1}(Q_{1j})}{\sqrt{Y_1(Q_{1j})}} \\ \alpha_{o2j} = \frac{w_{o2}(Q_{2j})}{\sqrt{Y_2(Q_{2j})}} \end{array} \right.$$

Eq. 4.57

4.5.2. Coefficients de correspondance entre les vecteurs propres de couplage isolés

Ce qui va être étudié maintenant vient du fait que l'on a besoin d'exprimer le produit d'une $j^{\text{ème}}$ matrice de couplage isolée avec un $i^{\text{ème}}$ vecteur propre de couplage isolé⁹, c'est-à-dire $\overline{\overline{C_j}}\{\overline{\overline{\phi_i}}\}$. Dans ce cas, le $i^{\text{ème}}$ vecteur propre doit être exprimé en fonction du $j^{\text{ème}}$ pour que les propriétés des quantités propres puissent se manifester. Insistons sur le fait que les vecteurs propres de couplage isolés ne sont pas orthogonaux.

Chaque vecteur propre de couplage isolé "i" est relié au vecteur propre de couplage isolé "j" par la relation suivante :

$$\begin{array}{l} \hat{i} \overline{\overline{\phi_{1i}}} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{i} \overline{\overline{\phi_{2i}}} \hat{\mathbf{p}} \end{array} = \{ \overline{\overline{R_{ij}}} \} + \begin{array}{l} \hat{i} b_{1ij} \overline{\overline{\phi_{1j}}} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{i} b_{2ij} \overline{\overline{\phi_{2j}}} \hat{\mathbf{p}} \end{array}$$

Eq. 4.58

Après calculs (reportés en Annexe 4), on peut donner les expressions analytiques des facteurs b_{kij} :

$$\left| \begin{array}{l} b_{1ij} = \frac{Y_1(Q_{1i}, Q_{1j})}{\sqrt{Y_1(Q_{1i})} \sqrt{Y_1(Q_{1j})}} \\ b_{2ij} = \frac{Y_2(Q_{2i}, Q_{2j})}{\sqrt{Y_2(Q_{2i})} \sqrt{Y_2(Q_{2j})}} \end{array} \right.$$

Eq. 4.59

L'expression $Y_1(Q_{1i}, Q_{1j})$ est définie comme la mobilité de transfert entre les points de connexion des ressorts i et j de la plaque 1. Son expression littérale, établie dans le chapitre 3, provient de la définition des termes de mobilité :

⁹ Ce produit a été rencontré au § 4.3.

$$Y_1(Q_{1i}, Q_{1j}) = \bar{\psi}_{1k}(Q_{1i}) \bar{Z}_{11k}^{-1} \bar{\psi}_{1k}(Q_{1j})$$

Eq. 4.60

4.5.3. Matrice de passage entre les quantités propres de couplage globales et isolées

Le paragraphe précédent s'est intéressé à un moyen de passage entre vecteurs propres isolés de la même base. Maintenant, on cherche un moyen de passer des quantités propres isolées aux quantités propres globales, tant pour les valeurs propres que les vecteurs propres de couplage.

On suppose qu'il existe une matrice de passage \bar{A} entre les N_k vecteurs propres de couplage globaux $\{\bar{\Phi}_i\}$ et les N_k vecteurs propres de couplage isolés $\{\bar{\phi}_i\}$.

Si la matrice $\begin{bmatrix} \bar{e}_{\Phi_1} \\ \bar{e}_{\Phi_2} \end{bmatrix}$ représente les N_k vecteurs propres globaux et $\begin{bmatrix} \bar{e}_{\phi_1} \\ \bar{e}_{\phi_2} \end{bmatrix}$ la matrice des

N_k vecteurs propres isolés, toutes deux de dimensions $(M+N \times N_k)$, la matrice de passage \bar{A} qui les relie est de dimensions $(2N_k \times 2N_k)$ et se définit comme suit :

$$\begin{bmatrix} \bar{e}_{\Phi_1} \\ \bar{e}_{\Phi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{e}_{\phi_1} \\ \bar{e}_{\phi_2} \end{bmatrix} \bar{A} \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix}$$

Eq. 4.61

Les termes génériques de la matrice de passage \bar{A} se notent "a" :

$$\begin{aligned} \bar{A}_{1ij} &= a_{1ij} \\ \bar{A}_{2ij} &= a_{2ij} \end{aligned}$$

Eq. 4.62

L'Eq. 4.20 et l'Eq. 4.49 montrent que les vecteurs propres globaux et isolés décrivent le même espace. Ainsi, on peut écrire que le passage d'une base de vecteurs propres à l'autre s'effectue par :

$$\begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{1i} \\ \bar{\Phi}_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{1ij} \\ \bar{a}_{2ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_{1j} \\ \bar{\phi}_{2j} \end{bmatrix}$$

Eq. 4.63

Ces coefficients a_{kij} s'obtiennent à partir d'une matrice dénommée \bar{V} ; ils sont les coefficients d'amplitude des vecteurs propres de \bar{V} . Cette matrice¹⁰ est constituée de sous-matrices diagonales nulles (c'est-à-dire qu'elle est de même forme que la matrice de couplage) :

¹⁰ Les calculs pour obtenir \bar{V} sont décrits en Annexe 4.

$$\overline{\overline{\mathbf{V}}} = \begin{pmatrix} \overline{\overline{\mathbf{e}}} & \overline{\overline{\mathbf{0}}} \\ \overline{\overline{\mathbf{0}}} & \overline{\overline{\mathbf{V}}}_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\overline{\mathbf{u}}} \\ \overline{\overline{\mathbf{u}}} \end{pmatrix}$$

Eq. 4.64

L'expression générique de la matrice $\overline{\overline{\mathbf{V}}}$ est définie par :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\mathbf{V}}}_{12}(V_{12})_{ij} &= \lambda_i b_{2ji} \\ \overline{\overline{\mathbf{V}}}_{21}(V_{21})_{ij} &= \lambda_i b_{1ji} \end{aligned}$$

Eq. 4.65

On constate que la matrice $\overline{\overline{\mathbf{V}}}$ est adimensionnelle (puisque les valeurs propres de couplage isolées et les coefficients de correspondance le sont). En développant son expression générique, il vient :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\mathbf{V}}}_{12}(V_{12})_{ij} &= \frac{k_i \sqrt{Y_1(Q_{1i})}}{j\omega \sqrt{Y_2(Q_{2j})}} Y_2(Q_{2j}, Q_{2i}) \\ \overline{\overline{\mathbf{V}}}_{21}(V_{21})_{ij} &= \frac{k_i \sqrt{Y_2(Q_{2i})}}{j\omega \sqrt{Y_1(Q_{1j})}} Y_1(Q_{1j}, Q_{1i}) \end{aligned}$$

Eq. 4.66

Cette matrice $\overline{\overline{\mathbf{V}}}$ est d'un intérêt fondamental pour le passage des quantités propres de couplage isolées aux quantités propres globales. En effet :

- les valeurs propres de la matrice $\overline{\overline{\mathbf{V}}}$ sont les valeurs propres de couplage globales Λ_i ,
- l'ensemble des vecteurs propres de $\overline{\overline{\mathbf{V}}}$ forme la matrice $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$. Les termes des vecteurs propres sont les coefficients qui permettent de reconstruire les vecteurs propres de couplage globaux,
- les valeurs propres de couplage isolées étant accessibles à la mesure, on peut accéder aux valeurs propres de couplage globales à condition de mesurer les mobilité de transfert qui permettent de définir les coefficients de correspondance de la matrice $\overline{\overline{\mathbf{B}}}$,
- la matrice $\overline{\overline{\mathbf{V}}}$ est de beaucoup plus petites dimensions que la matrice de couplage $\overline{\overline{\mathbf{C}}}$. Ainsi, le calcul des valeurs propres de couplage globales est très rapide¹¹.

Parce que la matrice $\overline{\overline{\mathbf{V}}}$ et la matrice de couplage $\overline{\overline{\mathbf{C}}}$ sont de même forme, on peut calculer les sous-matrices de $\overline{\overline{\mathbf{V}}}$ au carré qui donneront les valeurs propres de couplage globales au carré (Ce qui montre d'une autre manière que les valeurs propres de couplage globales existent par couples de signe opposé).

¹¹ $\overline{\overline{\mathbf{C}}}$ est de dimensions $(M+N \times M+N)$ alors que $\overline{\overline{\mathbf{V}}}$ comporte $(2N_k \times 2N_k)$ termes, étant entendu que $2N_k \ll (M+N)$ puisque M et N sont les nombres de modes des plaques 1 et 2 alors que N_k est le nombre de ressorts.

$$\begin{aligned} \mathbf{\ddot{u}}(E_1)_{ij} &= \sum_{k=1}^{N_k} \mathbf{\dot{a}}_{1jk} b_{1ki} \\ \mathbf{\ddot{u}}(E_2)_{ij} &= \sum_{k=1}^{N_k} \mathbf{\dot{a}}_{2jk} b_{2ki} \end{aligned}$$

Eq. 4.70

Les entiers i et j décrivent les N_k ressorts de couplage. Les blocs non nuls de $\overline{\overline{\mathbf{E}}}$ sont sur la diagonale, signe d'un problème bien conditionné. Il suffit donc de résoudre ce système pour connaître la valeur des coefficients propres globaux des systèmes découplés bloqués $\rho_{oi k}$.

4.6. CONCLUSION

Ce chapitre avait pour but d'examiner le cas de deux plaques couplées par N_k ressorts. Dans ce cas, il y a N_k paires de valeurs propres de couplage et N_k paires de vecteurs propres de couplage, ce qui suit la logique de l'unique couple de valeurs propres de couplage trouvée au chapitre précédent dans le cas d'un seul ressort de couplage. La différence fondamentale vient de ce que les quantités propres sont dépendantes des caractéristiques de tous les ressorts (et des plaques) et qu'il n'y a pas de relation simple pour les exprimer analytiquement.

La connaissance de ces quantités propres autorise d'effectuer une résolution analytique du problème des deux plaques couplées par N_k ressorts. On constate alors que la solution en vitesse est égale à la vitesse des systèmes découplés bloqués et à la somme linéaire des N_k contributions des quantités propres de couplage globales (cf. Eq. 4.20). Le couplage par un seul ressort étudié au chapitre 3 constitue le premier terme de cette série. Les coefficients propres s'obtiennent alors par un calcul matriciel simple.

Le concept de la méthode simplifiée qui est décrite ensuite repose sur le fait que la valeur propre de couplage est représentative de la force du couplage. Dans le cas de N_k ressorts, la représentation fréquentielle des N_k valeurs propres de couplage montre que la plupart du temps, une valeur propre de couplage domine toutes les autres. Ainsi, on peut en déduire que la plupart du temps, la contribution d'un seul chemin modal de couplage est suffisante pour décrire parfaitement la solution en vitesse des systèmes couplés.

La mise en œuvre de cette méthode pour 9 ressorts de couplage montre que cette résolution simplifiée décrit parfaitement la solution de référence jusqu'à assez haut en fréquence, et la sous-estime d'environ 3 dB aux plus hautes fréquences. Cette mésestimation vient de ce que les croisements des plus grandes valeurs propres de couplage s'intensifient, ce qui ne permet pas de vérifier l'hypothèse d'une seule valeur propre de couplage dominante. Malgré cette légère sous-estimation, on ne peut que constater l'excellence des résultats fournis par la résolution simplifiée.

La démarche inverse qui consiste à enlever le chemin dominant est appliquée ; ainsi on peut réduire le niveau de vibration transmis par l'ensemble des liaisons. Cette technique fournit de très bons résultats d'isolement dont les performances diminuent si l'on monte en fréquence (de la même manière que la méthode simplifiée donne de meilleurs résultats aux basses qu'aux hautes fréquences).

La recombinaison de la vitesse des systèmes couplés donnant un excellent résultat alors qu'un seul des neuf chemins est pris en compte, cela démontre ainsi la qualité de la méthode simplifiée et son côté physique. Ce résultat est d'autant plus remarquable que les raideurs des ressorts sont équivalentes. Il s'améliore encore quand les raideurs des ressorts sont différenciées.

Les valeurs propres de couplage présentent un double avantage : elles sont très facilement et très directement accessibles par la mesure et elles correspondent chacune à un ressort, donc chacune à un chemin physique. Une recombinaison de la vitesse des systèmes couplés à partir de ces quantités propres isolées est établie. Elle montre que la contribution du couplage s'effectue par la somme linéaire des N_k contributions des quantités propres de couplage isolées.

Comme dans le cas des quantités propres globales, on en extrait une méthode simplifiée ne prenant en compte que le chemin physique dominant, c'est-à-dire s'appuyant sur la valeur propre de couplage isolée dominante. Evidemment, cette résolution simplifiée est beaucoup moins performante que celle basée sur le chemin modal dominant tant que les caractéristiques des liaisons sont identiques. En revanche, lorsque les raideurs des ressorts sont différentes les unes des autres, les valeurs propres de couplage isolées sont bien différenciées et cette résolution simplifiée donne des résultats très satisfaisants. L'avantage de cette méthode est son côté éminemment pratique puisque l'on connaît alors quelles sont les liaisons les plus concernées par le couplage.

Le dernier paragraphe fournit des relations permettant de déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de couplage "globaux" à partir des valeurs propres et vecteurs propres de couplage "isolés", les quantités isolées étant issues de la configuration où un seul des N_k ressorts est considéré entre les plaques découplées bloquées. On remarque d'ailleurs que les valeurs propres de couplage sont de forme identique à celle trouvée au chapitre 3, ce qui explique qu'elles sont accessibles à la mesure.

Une technique de recombinaison qui permet de passer des quantités propres isolées aux quantités propres globales est ainsi définie : elle construit une matrice de petites dimensions ($2N_k \times 2N_k$) qui dépend des valeurs propres de couplage isolées et des mobilités de transfert entre les points de connexion des ressorts. Les valeurs propres de cette matrice donnent les valeurs propres de couplage globales tandis que les vecteurs propres donnent les coefficients qui permettent de reconstruire les vecteurs propres de couplage globaux à partir des vecteurs propres de couplage isolés.

Dans la même optique, les coefficients globaux nécessaires à la recombinaison des solutions sur les quantités propres globales sont déterminés à partir des quantités propres isolées, ce qui rend possible la résolution simplifiée basée sur le chemin modal dominant dans le cas d'une approche expérimentale, approche qui fait maintenant l'objet du chapitre suivant.

Ce chapitre bien que s'adressant toujours à un cas de structure simple ouvre la voie traitant de cas beaucoup plus compliqués. On peut très facilement généraliser ces résultats au cas de deux systèmes quelconques modélisés par éléments finis (par exemple), en remplacement des plaques.

* * *
*

CHAPITRE 5

Approche expérimentale

CHAPITRE 5 - SOMMAIRE

5.1. OBJECTIFS DE L'APPROCHE EXPERIMENTALE

5.2. DESCRIPTION SOMMAIRE DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL

5.3. CAS D'UNE SEULE LIAISON

5.3.1. Description des mesures et nomenclature

5.3.2. Expression mathématique de la solution

5.3.3. Résultats de l'expérience

5.3.3.1. Valeur propre de couplage

5.3.3.2. Vitesses

5.4. CAS DE 3 LIAISONS

5.4.1. Description des mesures et nomenclature

5.4.2. Recomposition complète de la vitesse

5.4.2.1. Méthode basée sur les quantités propres de couplage isolées

5.4.2.2. Méthode basée sur les quantités propres de couplage globales

5.4.3. Résultats de l'expérience

5.4.3.1. Valeurs propres de couplage

5.4.3.2. Vitesses

5.4.4. Résolution simplifiée

5.4.5. Résultats expérimentaux de la résolution simplifiée

5.5. CONCLUSION

5. Approche expérimentale

5.1. OBJECTIFS DE L'APPROCHE EXPERIMENTALE

Les chapitres précédents se sont intéressés à l'étude des mécanismes du couplage mis en jeu lors du couplage de deux plaques par un ou plusieurs ressorts ; ces mécanismes ont alors été décrits de manière analytique. L'approche présentée maintenant va suivre la méthode des valeurs propres et des vecteurs propres de couplage pour permettre de tester son efficacité vis à vis d'une approche expérimentale.

On a pu constater que la méthode de résolution basée sur l'exploitation des valeurs propres de couplage et des vecteurs propres de couplage possède un grand sens physique : elle donne des indicateurs de force de couplage et la résolution simplifiée qui n'utilise qu'un seul des chemins de transmission est très efficace. C'est pourquoi il est important de savoir si l'alternative expérimentale de cette méthode reproduit elle aussi ce sens physique, ou en d'autres termes, si elle présente elle aussi des grandes qualités de robustesse.

L'approche expérimentale décrite dans ce chapitre consiste en la mesure des mobilités d'entrée et de transfert des systèmes vibrants. Munis de ces mobilités, il est possible de reconstruire les valeurs propres de couplage d'une part et les réponses vibratoires d'autre part. Pour ce faire, on va procéder à des expérimentations selon les trois axes déjà vus dans les deux chapitres précédents :

- résolution dans le cas de deux plaques couplées par un ressort,
- résolution exacte dans le cas de deux plaques couplées par trois ressorts identiques,
- résolution simplifiée dans le cas de deux plaques couplées par trois ressorts identiques.

Le cas de la liaison unique va permettre de constater la précision et les difficultés de mise en œuvre d'une telle expérience. Elle ne nécessite qu'un nombre relativement limité de mesures et offre donc la possibilité d'une bonne précision. Quant aux résolutions dans le cas du couplage par trois ressorts, même si le but final est l'étude de la résolution simplifiée, on doit étudier cette configuration de manière approfondie pour constater quel est le degré de précision des reconstitutions en vitesse, et des reconstitutions des quantités globales à partir des quantités isolées, pour appliquer la résolution simplifiée basée sur le chemin modal dominant.

5.2. DESCRIPTION DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL

La description complète du dispositif expérimental se trouve en Annexe 5. Celle-ci décrit tous les aspects des éléments, plaques, ressorts, excitateur, matériels de mesure. Elle donne les raisons des choix de ces éléments, justifie les dimensionnements et explique les mises en œuvre. Par ailleurs, cette annexe propose différents résultats complémentaires à cette approche expérimentale, comme la vérification de la réciprocité, la condition découplée bloquée etc..

Pour permettre au lecteur de poursuivre une lecture cursive, un descriptif succinct est cependant donné dans ce paragraphe.

Après avoir passé plusieurs chapitres sur l'étude de deux plaques couplées, il était difficile d'échapper au choix des deux plaques couplées pour l'approche expérimentale. Puisque la connaissance des bases modales de vibration n'est pas indispensable, on peut envisager d'autres configurations de plaques que celle du modèle théorique, (c'est-à-dire les plaques en condition d'appui simple, particulièrement difficiles à mettre en œuvre expérimentalement). C'est pourquoi l'on a choisi de suspendre les plaques dans le sens vertical (les plaques sont donc libres). Pendre les plaques offre certains avantages qui sont entre autres une mise en œuvre simplifiée, une bonne isolation entre les systèmes procurée par la suspension et accessoirement une manipulation aisée.

Ces plaques en acier sont accrochées souplement à deux potences pour éviter toute transmission solidienne de l'une à l'autre. Les ressorts de liaison sont constitués par des petites barrettes de Plexiglas. L'excitation est fournie par un pot vibrant, suspendu souplement à la potence, et appuyé contre la plaque. Les mesures de vitesse se font par deux accéléromètres aux points de mesures et une tête d'impédance entre le pot vibrant et la plaque, tête qui mesure la vitesse et la force injectée. Le traitement de ces données fournit des fichiers de type mobilité. La représentation de ce dispositif expérimental est montrée sur la Figure 5.1 suivante :

Les principales données du modèle expérimental sont dans les tableaux suivantes :

	Longueur (m)	Largeur (m)	Epaisseur (mm)	Masse (kg)	Densité modale (nb mode / Hz)
Plaque 1	0,59	0,85	5	19,88	$5,19 \cdot 10^{-3}$
Plaque 2	1,02	0,85	2	13,55	$2,21 \cdot 10^{-2}$

Tableau 5.1 : Descriptif des plaques.

	Longueur (m)	Diamètre (mm)	Raideur théorique (N.m ⁻¹)
Liaison	0,1	6	0,79 10 ⁶

Tableau 5.2 : Descriptif de la liaison

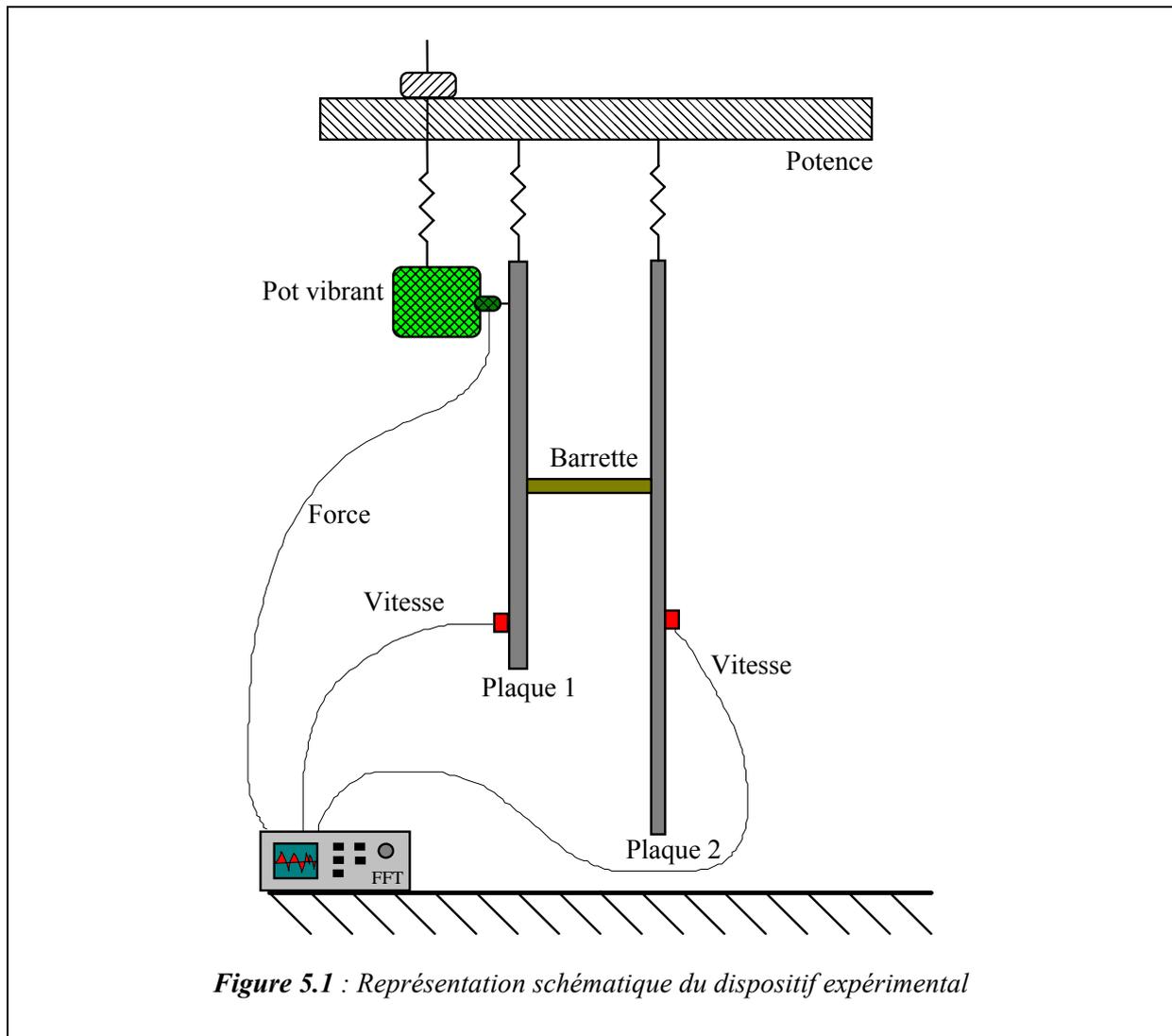


Figure 5.1 : Représentation schématique du dispositif expérimental

5.3. CAS D'UNE SEULE LIAISON

5.3.1. Description des mesures et nomenclature

Dans le cas où une seule plaque, dans la configuration couplée, est excitée, les mesures de mobilité nécessaires au calcul de la solution en vitesse au point courant M se décomposent en 4 phases selon la position du pot et selon l'état des plaques (découplées bloquées ou couplées) :

- ◆ Plaques couplées : pot au point d'excitation F
- ◆ Plaque 1 découplée bloquée: pot au point d'excitation F
- ◆ Plaque 1 découplée bloquée : pot au droit du ressort Q_1
- ◆ Plaque 2 découplée bloquée : pot au droit du ressort Q_2

On rappelle que le point d'excitation F se trouve toujours sur la plaque 1. D'autre part, sur chaque plaque existe un point courant noté M_1 ou M_2 à la position duquel on cherche à reconstruire la vitesse. Les coordonnées du ressort sur chaque plaque sont repérées par Q_1 et Q_2 . Enfin, l'état de découplé bloqué se note "BU" pour la traduction anglaise de "blocked uncoupled", alors que l'état des plaques couplées se repère par "C". Le Tableau 5.3 indique les mesures à faire pour accéder directement aux vitesses aux points courants M_1 et M_2 des plaques couplées tandis que le Tableau 5.4 résume toutes les mesures à faire dans le cas d'une seule liaison pour appliquer la méthode des quantités propres de couplage :

Plaques concernées	Type de mobilité	Points d'application	Expression mathématique	Nom condensé
Plaques couplées	Mobilité de transfert	Point d'excitation & Point courant plaque 1	$Y_C(F, M_1)$	P1CFM1
Plaques couplées	Mobilité de transfert	Point d'excitation & Point courant plaque 2	$Y_C(F, M_2)$	P1CFM2

Tableau 5.3 : Descriptif et nomenclature pour mesurer directement la vitesse aux points courant des plaques couplées

Plaques concernées	Type de mobilité	Points d'application	Expression mathématique	Nom condensé
Plaque 1 BU	Mobilité de transfert	Point d'excitation F & Point de couplage Q ₁	Y _{BU} (F,Q ₁)	P1BUFQ
Plaque 1 BU	Mobilité de transfert	Point d'excitation F & Point courant plaque 1 M ₁	Y _{BU} (F,M ₁)	P1BUFM1
Plaque 1 BU	Mobilité d'entrée	Point de couplage Q ₁	Y _{BU} (Q ₁ ,Q ₁)	P1BUQQ
Plaque 1 BU	Mobilité de transfert	Point de couplage Q ₁ & Point courant plaque 1 M ₁	Y _{BU} (Q ₁ ,M ₁)	P1BUQM1
Plaque 2 BU	Mobilité d'entrée	Point de couplage Q ₂	Y _{BU} (Q ₂ ,Q ₂)	P2BUQQ
Plaque 2 BU	Mobilité de transfert	Point de couplage Q ₂ & Point courant plaque 2 M ₂	Y _{BU} (Q ₂ ,M ₂)	P2BUQM2

Tableau 5.4 : Descriptif et nomenclature des mesures à effectuer dans le cas où les deux plaques sont couplées par un seul ressort : Les plaques sont toutes en configuration découplée bloquée.

5.3.2. Expression mathématique de la solution

On cherche à retrouver l'expression de l'Eq. 3.59 qui établit l'égalité entre la vitesse des systèmes couplés, d'une part, et la vitesse des systèmes découplés plus les termes issus du couplage dans le cas d'une excitation sur le seul système 1 en fonction des mobilités mesurées, d'autre part. Cette expression est :

$$\begin{cases} \bar{w}_1 = \bar{w}_{o1} + \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} \alpha_{o1} \bar{\Phi}_1 \\ \bar{w}_2 = \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \alpha_{o1} \bar{\Phi}_2 \end{cases}$$

Eq. 5.1

Les vecteurs sont les vecteurs des amplitudes modales des vitesses, comme il l'est rappelé dans l'Eq. 5.2. Il est également rappelé que dans cette approche expérimentale, on ne cherche pas à accéder à la base modale, ce qui suppose donc de travailler en un point

courant M. Au lieu de raisonner en vecteurs des amplitudes modales¹, on travaillera en un point courant M, c'est-à-dire que l'on remontera jusqu'à la valeur de la vitesse telle qu'elle a été exprimée en Eq. 2.1:

$$w(M, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i(\omega) \psi_i(M)$$

Eq. 5.2

L'expression de l'Eq. 5.1 est écrite quand on se place aux points courants M_1 et M_2 des plaques 1 et 2. Pour cela, la démarche exprimée par l'Eq. 5.2 est appliquée, c'est-à-dire que l'on somme, sur le nombre de modes pris en compte, le produit des vecteurs des amplitudes modales par le vecteur de la base modale considérée au point courant (i parcourant l'ensemble des modes de vibration) :

$$\begin{cases} \sum_i w_{1i} \psi_{1i}(M_1) = \sum_i w_{o1i} \psi_{1i}(M_1) + \sum_i \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} \alpha_{o1} \phi_{1i} \psi_{1i}(M_1) \\ \sum_i^N w_{2i} \psi_{2i}(M_2) = \sum_i \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \alpha_{o1} \phi_{2i} \psi_{2i}(M_2) \end{cases}$$

Eq. 5.3

Cette expression se met sous la forme :

$$\begin{cases} w_1(M_1) = w_{o1}(M_1) + \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} \alpha_{o1} \phi_1(M_1) \\ w_2(M_2) = \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \alpha_{o1} \phi_2(M_2) \end{cases}$$

Eq. 5.4

Deux relations existent maintenant entre les vitesses et les vecteurs propres, tous considérés à leur point courant respectif. On rappelle que les quantités mesurées sont des mobilités. La mobilité Y est reliée à la vitesse w par $w = F Y$, quand la force s'exprime par F .

Toutes les mesures sont référencées par rapport à la force injectée dans les systèmes, ce qui signifie que la vitesse et la mobilité sont toujours proportionnelles dans le même rapport. Si l'on remplace les vitesses de l'Eq. 5.4 par leur expression fonction de la force et de la mobilité, on obtient une équation uniquement fonction des mobilités. Pour cela, il faut encore exprimer les membres de droite de l'Eq. 5.4 selon des expressions de mobilités. Il suffit de remplacer le vecteur propre de couplage et le facteur propre par leurs expressions qui sont données en Eq. 3.27 et Eq. 3.51-52 pour obtenir les vitesses des plaques aux points courants M_1 et M_2 :

¹ Jusqu'à maintenant, les résultats en vitesse étaient les vitesses quadratiques moyennes des vecteurs des amplitudes modales.

$$\begin{cases} w_1(M_1) = w_{o1}(M_1) + \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} \frac{w_{o1}(Q_1)}{\sqrt{Y_1(Q_1)}} \frac{|Y_1(Q_1, M_1)|}{\sqrt{Y_1(Q_1)}} \\ w_2(M_2) = \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \frac{w_{o1}(Q_1)}{\sqrt{Y_1(Q_1)}} \frac{|Y_2(Q_2, M_2)|}{\sqrt{Y_2(Q_2)}} \end{cases}$$

Eq. 5.5

Toutes les quantités du système d'équations précédent sont des scalaires. L'expression de la valeur propre de couplage est directement liée aux mobilités de chaque plaque considérées aux points de connexion du ressort de couplage :

$$\lambda^2 = -\frac{k^2}{\omega^2} Y_1(Q_1) Y_2(Q_2)$$

Eq. 5.6

Le Tableau 5.5 suivant donne la correspondance entre les vitesses et leur expression en fonction de la mobilité :

Configuration des plaques	Expression de la vitesse	Expression de la mobilité associée
Plaques couplées	$w_1(M_1)$	$Y_1(F, M_1)_C$
Plaques couplées	$w_2(M_2)$	$Y_2(F, M_2)_C$
Plaque 1 BU	$w_{o1}(M_1)$	$Y_1(F, M_1)_{BU}$
Plaque 1 BU	$w_{o1}(Q_1)$	$Y_1(F, Q_1)_{BU}$

Tableau 5.5 : Correspondances entre les vitesses et les mobilités pour une même excitation.

Dans un notation "expérimentale", l'Eq. 5.1 s'écrit, après simplification par la force injectée F et quand les indices C et BU signifient respectivement *Couplé* et *découplé bloqué* :

$$\begin{cases} Y_1(F, M_1)_C = Y_1(F, M_1)_{BU} + \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} \frac{Y_1(F, Q_1)_{BU}}{Y_1(Q_1)_{BU}} |Y_1(Q_1, M_1)_{BU}| \\ Y_2(F, M_2)_C = \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \frac{Y_1(F, Q_1)_{BU}}{\sqrt{Y_1(Q_1)_{BU}}} \frac{|Y_2(Q_2, M_1)_{BU}|}{\sqrt{Y_2(Q_2)_{BU}}} \end{cases}$$

Eq. 5.7

La valeur propre de couplage s'écrivant :

$$\lambda = \frac{k}{j\omega} \sqrt{Y_1(Q_1, Q_1)_{BU} Y_2(Q_2, Q_2)_{BU}}$$

Eq. 5.8

5.3.3. Résultats de l'expérience

5.3.3.1. Valeur propre de couplage

La valeur propre de couplage est, on le répète depuis les premiers chapitres, une valeur accessible par la mesure. Il est donc temps de montrer une représentation de la valeur propre de couplage reconstruite à partir des fichiers de mesure. Elle s'obtient directement à partir des mesures de la mobilité aux points de couplage et de la raideur de la liaison. Les Figure 5.2 et Figure 5.3 montrent le module de la valeur propre de couplage, avec dans le premier cas un axe des ordonnées linéaire, et dans l'autre cas, un axe des ordonnées en dB.

Les résultats en dessous de 100 Hz sont occultés. En effet, la condition découplée bloquée s'est avérée difficile à réaliser. Les masses bloquantes sont posées sur des supports qui se mettent à vibrer selon leur premier modes : en dessous de 100 Hz, ces modes de vibrations rendent inopérante toute tentative de blocage (cf. Annexe 5). Par ailleurs, l'Annexe 5 indique que pour bloquer efficacement les plaques, les masses bloquantes auraient dû faire un poids beaucoup trop élevé pour être manipulable par une personnes (pour bloquer la plaque 1 à 100 Hz, il aurait fallu une masse de 450 kg). Pour les masses de 30 kg finalement retenues, la condition découplée bloquée n'est parfaitement atteinte qu'aux environs de 400 Hz pour la plaque 1. Malgré cela, on montrera quand même les résultats expérimentaux entre 100 Hz et 400 Hz, car bien souvent les résultats restent très acceptables.

Première constatation, l'allure générale de la Figure 5.2 ressemble bien aux représentations de la valeur propre de couplage du chapitre 3, avec une zone de pics très marqués entre 100 et 1000 Hz, puis une zone où les pics, bien que présents, sont d'intensité moindre. La première zone est beaucoup plus étendue en fréquence (jusqu'à 1000 Hz) du fait que les bases modales de chaque plaque sont plus décalées que lors des applications numériques des chapitres précédents : les premiers modes de la plaque 1 apparaissent autour de 50 Hz, alors que ceux de la plaque 2, vers 10 Hz.

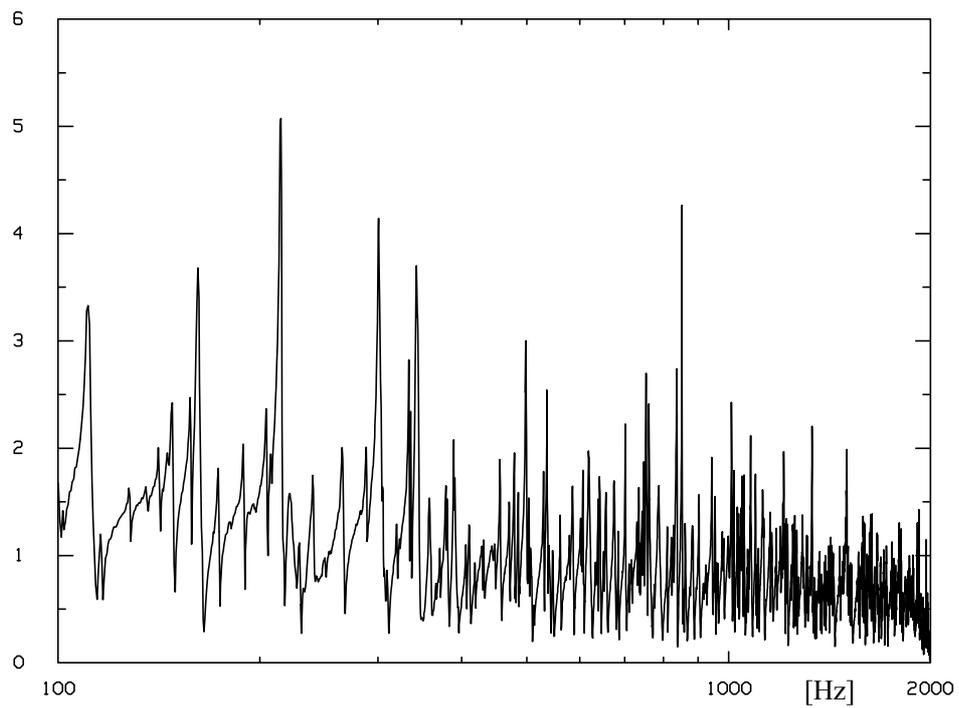


Figure 5.2 : Module de la valeur propre de couplage expérimentale en fonction de la fréquence

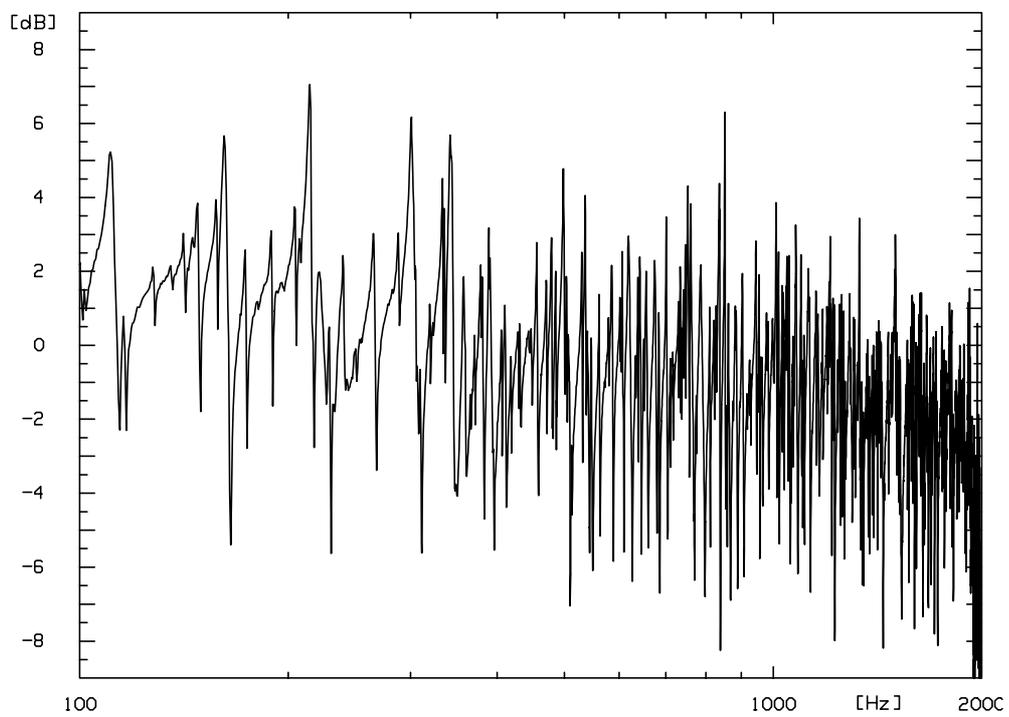


Figure 5.3 : Module (dB) de la valeur propre de couplage expérimentale en fonction de la fréquence

Deuxième constatation, le niveau de la valeur propre de couplage est beaucoup plus élevé qu'attendu. En effet, un pré-calcul avait été effectué à partir des dimensions expérimentales des plaques et de la raideur de la liaison. Il conduisait à une valeur propre de couplage moyennement élevée, c'est-à-dire restant pratiquement toujours en dessous de l'unité. Certes, il ne pouvait s'agir que d'une estimation grossière dans la mesure où le code de calcul repose sur l'hypothèse de plaques simplement appuyées et non pas libres (suspendues). La Figure 5.3 montre que, la valeur propre de couplage oscille globalement autour de 0 dB ce qui suppose un couplage fort (conformément à ce qui a été observé en § 3.3.1). Ce n'est qu'aux alentours de 1500 Hz que l'on observe une amorce de fléchissement, signe d'un couplage plus faible.

On peut expliquer (en partie) cette grande force de couplage par le fait qu'en dessous de 400 Hz, étant mal bloquées, les plaques découplées bloquées présentent une mobilité plus forte que ce qu'elle devrait être et donc la valeur propre de couplage est surestimée (cf. Eq. 5.8).

La valeur propre de couplage étant issue du produit des mobilités des plaques, sa densité modale l'est aussi. Comme la densité modale de la plaque 2 est de $2,2 \cdot 10^{-2}$, et celle de la plaque 1 de l'ordre de $5,19 \cdot 10^{-3}$ (cf. Annexe 5), la densité modale de la valeur propre de couplage est donc $2,7 \cdot 10^{-2}$. Elle fait apparaître à la fois les modes de la plaque 1 et ceux de la plaque 2. C'est pourquoi les pics de la valeur propre de couplage sont très rapprochés.

La Figure 5.3, du fait de sa représentation en dB, montre mieux les modes de vibrations, avec les résonances mais surtout les anti-résonances. Le recouvrement modal, qui s'intensifie avec la fréquence est bien visible également.

5.3.3.2. Vitesses

Les calculs numériques effectués dans le chapitre 4 ne montraient que la vitesse de la plaque 2 non excitée, puisque la contribution du terme du couplage de la plaque 1 était la plupart du temps masquée par celle de la vitesse découplée bloquée, w_{o1} . Dans l'approche expérimentale, bien que l'excitation soit aussi sur une seule des plaques, les vitesses des deux plaques seront présentées.

La vitesse de la plaque 1 au point courant M_1 est visible sur les Figure 5.4 en représentation bandes fines. Dans un but de lisibilité, chaque graphe parcourt seulement une partie de l'espace des fréquences, soit 100-800 Hz et 800-2000 Hz.

Le module de la vitesse de la plaque 1 mesurée au point M_1 quand les plaques sont couplées est comparé au module de la vitesse au point M_1 obtenue par la reconstruction expliquée au § 5.3.2. On peut constater que l'accord entre les deux courbes est très bon, tant dans la description des événements (pics, creux, plateaux) que dans les niveaux. Cela est d'autant plus vrai à partir de 400 Hz où les courbes sont quasiment confondues.

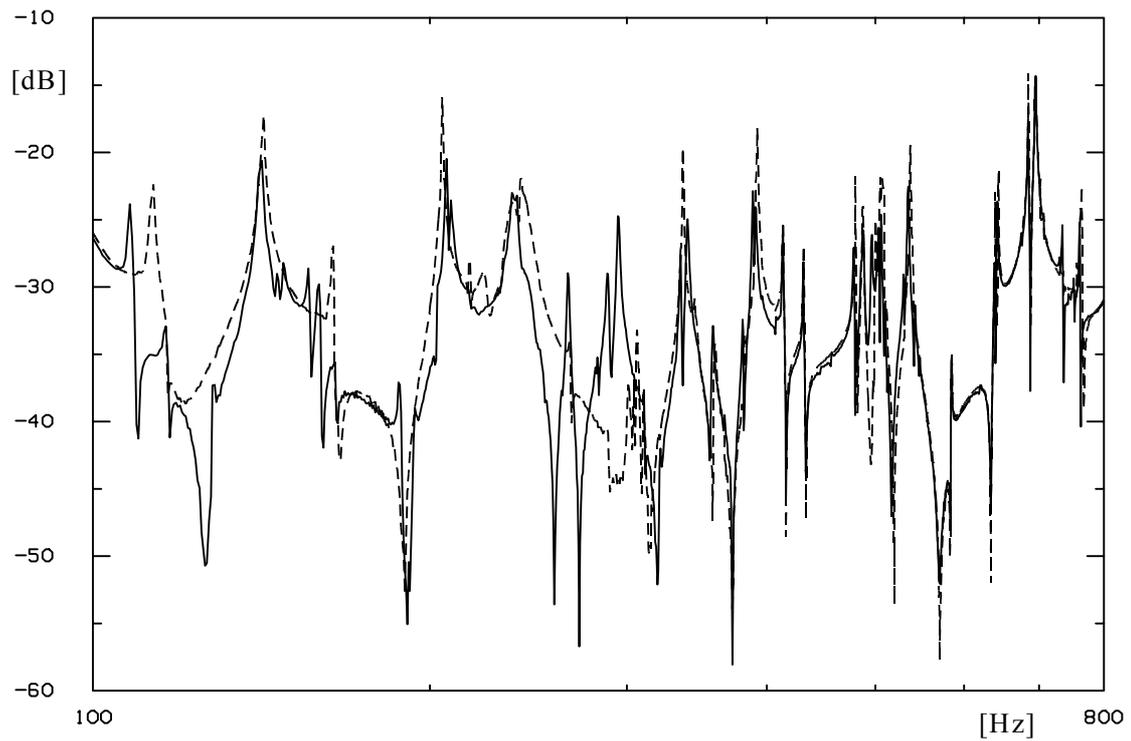
Les vitesses de la plaque 2 au point courant M_2 sont représentées dans les mêmes conditions sur les Figure 5.5. La densité modale étant 4 fois plus importante pour cette plaque (cf. Annexe 5), la représentation en bandes fines est de ce fait plus dense et la vitesse au point M_2 est alors représentée en trois zones fréquentielles (100-400 Hz, 400-1000 Hz, 1000-2000 Hz).

La comparaison entre les deux courbes est un peu moins bonne que dans le cas de la plaque 1. Néanmoins, il faut remarquer que les niveaux globaux du module des vitesses sont comparables, les pics et le creux étant également très bien rendus². Là encore, à partir de 400 Hz, les deux courbes deviennent beaucoup plus proches (même la vitesse de la plaque 2 souffre du mauvais blocage de la plaque 1 puisque des termes de mobilités mesurés sur la plaques 1 sont nécessaires à la recombinaison). Puisque $w_{o2}(M_2)$ est nul, toute la contribution de la vitesse recomposée provient du calcul des valeurs propres, facteurs propres et vecteurs propres au point M_2 . Les nombreuses opérations effectuées sur les fichiers de mesures peuvent expliquer le résultat légèrement moins bon que ceux de la plaque 1 où pratiquement le seul fichier correspondant à $w_{o1}(M_1)$ suffisait à donner la vitesse $w_1(M_1)$ (cf. Annexe 5).

Un autre aspect des vitesses des plaques au point courant est à observer : la phase. Celle-ci a constitué un excellent facteur de vérification pour le calcul de recombinaison. La Figure 5.6 montre encore une fois la bonne cohérence entre les deux courbes (de la plaque 1), surtout au delà de 400 Hz : les phases se suivent alors presque parfaitement.

La Figure 5.7 qui représente la phase de la vitesse de la plaque 2, n'est développée que jusqu'à 800 Hz, uniquement pour des raisons de lisibilité. Les mêmes remarques que celles faites pour la plaque 1 s'imposent, à savoir d'excellents résultats.

² La dynamique de la vitesse (plus de 40 dB) est de plus beaucoup plus forte que celle des valeurs propres de couplage (environ 10 dB).



(première partie)

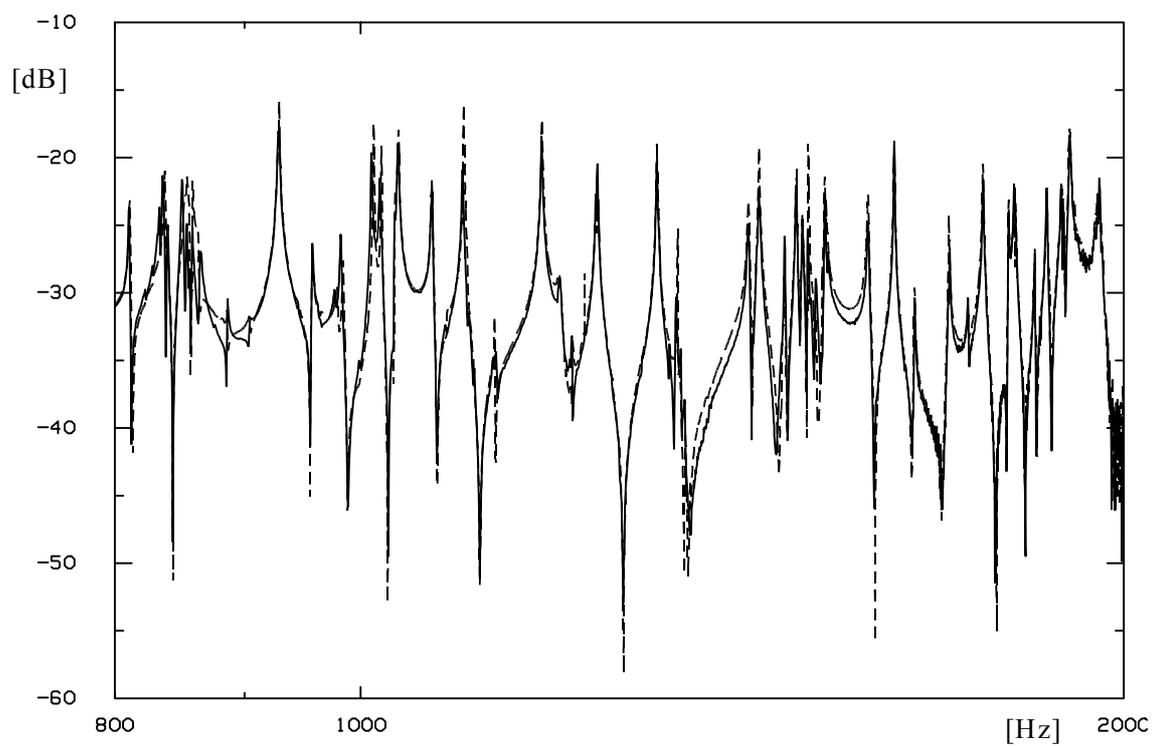
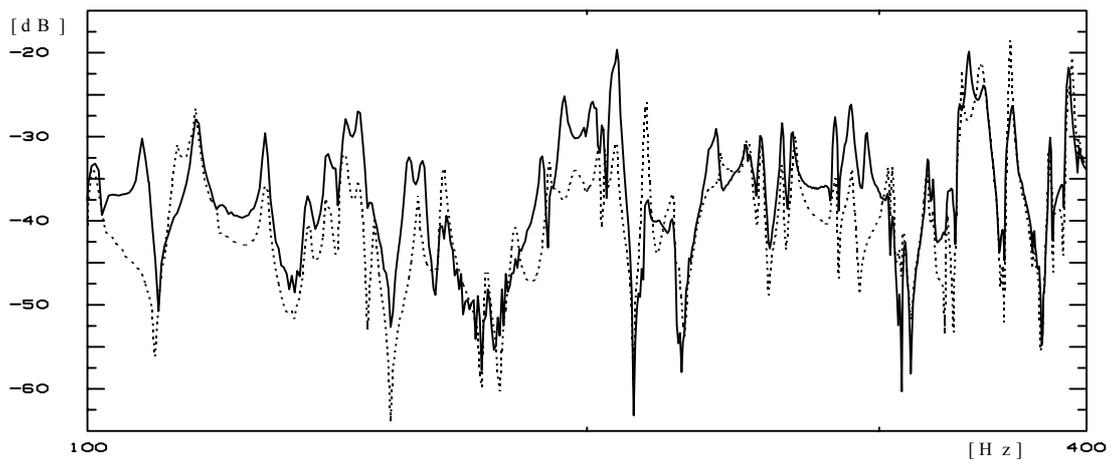
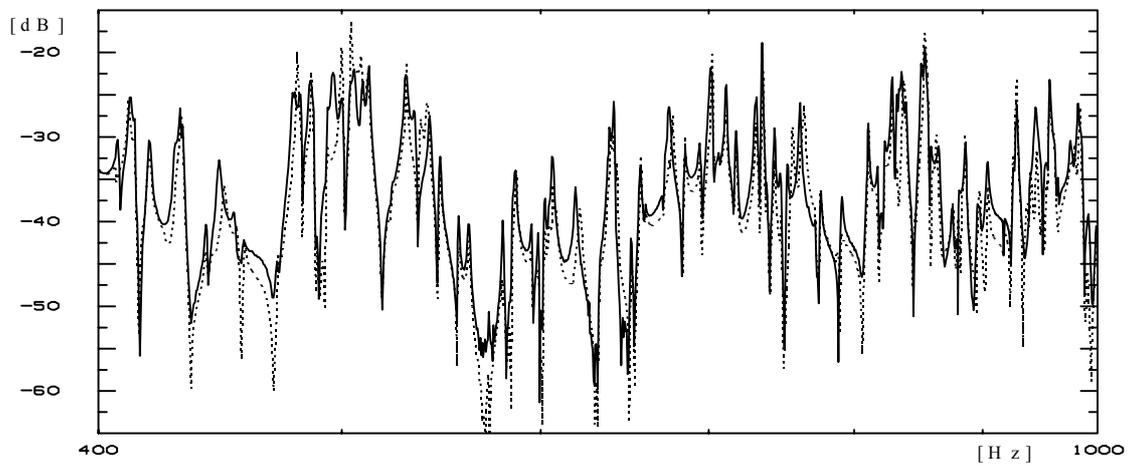


Figure 5.4 : Module de la vitesse de la plaque 1 au point M_1 , mesure directe (—) et recomposée (- - -) en fonction de la fréquence (deuxième partie)



(première partie)



(deuxième partie)

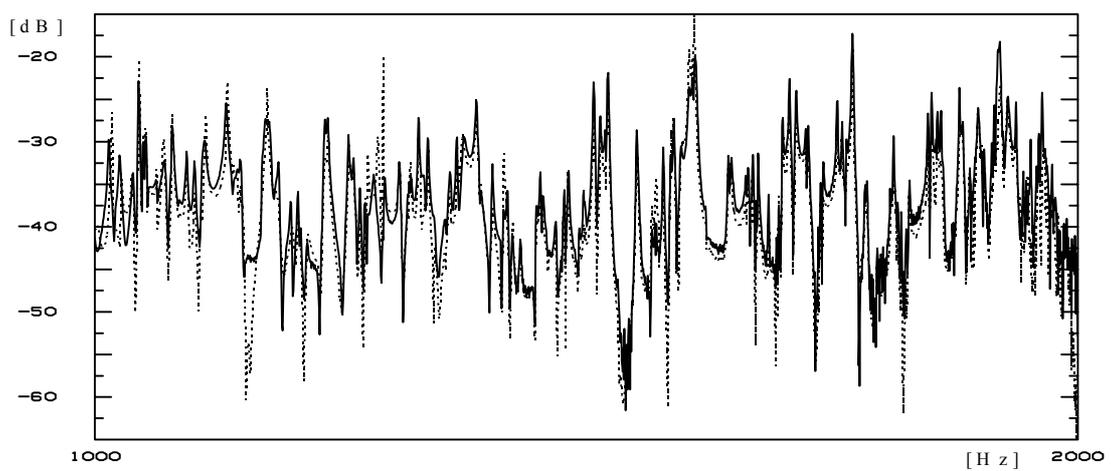
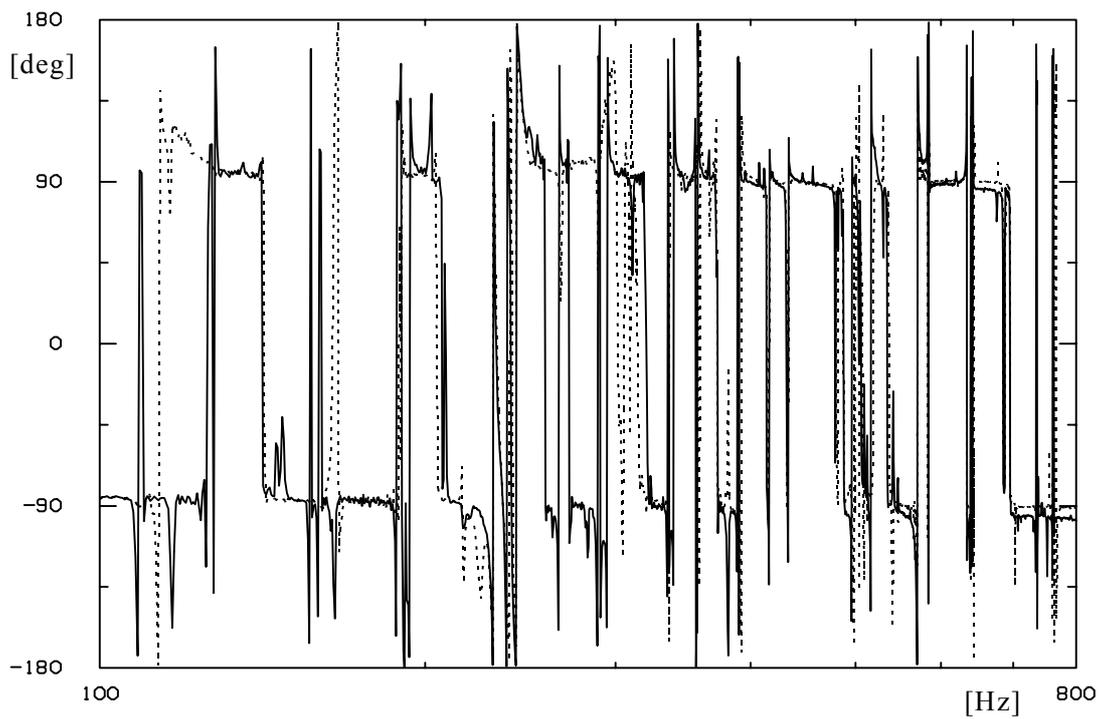


Figure 5.5 : Module de la vitesse de la plaque 2 au point M_2 , mesures directe (—) et recomposée (.....) en fonction de la fréquence (troisième partie)



(première partie)

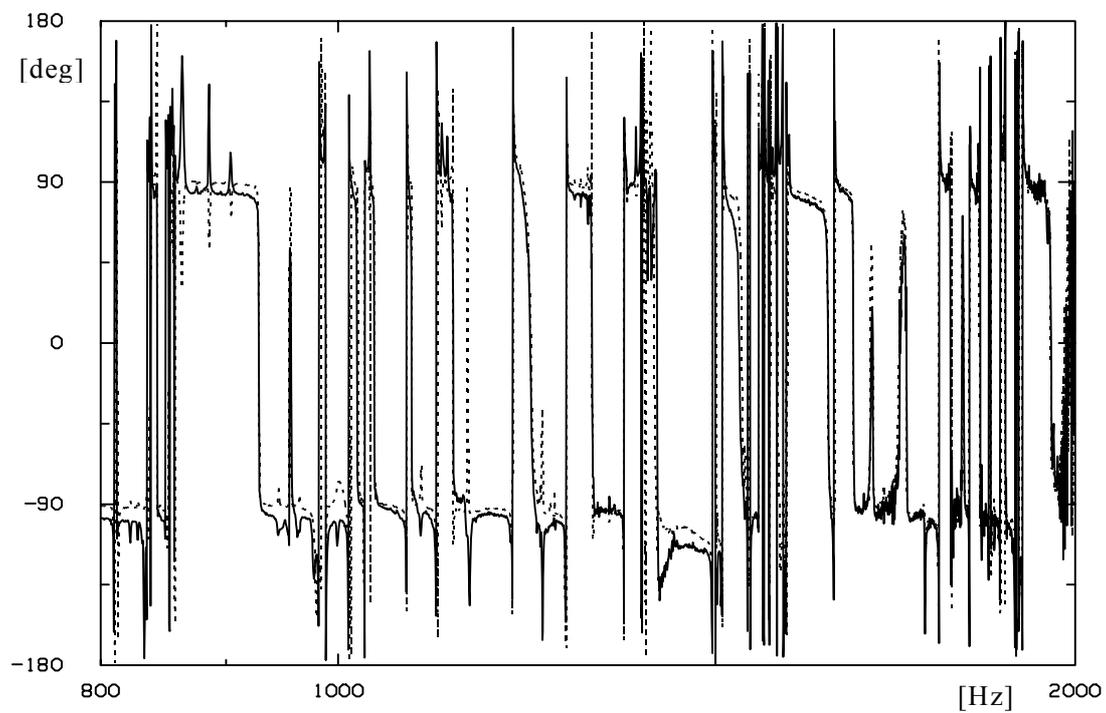
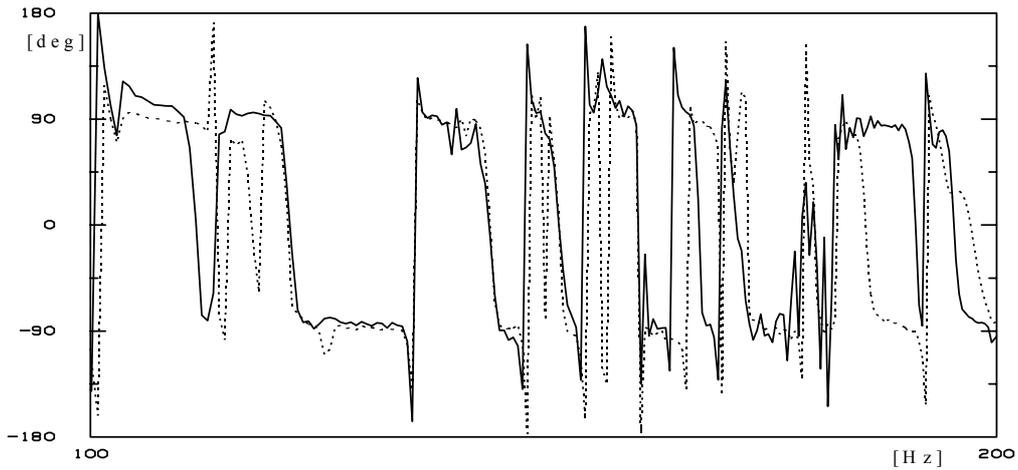
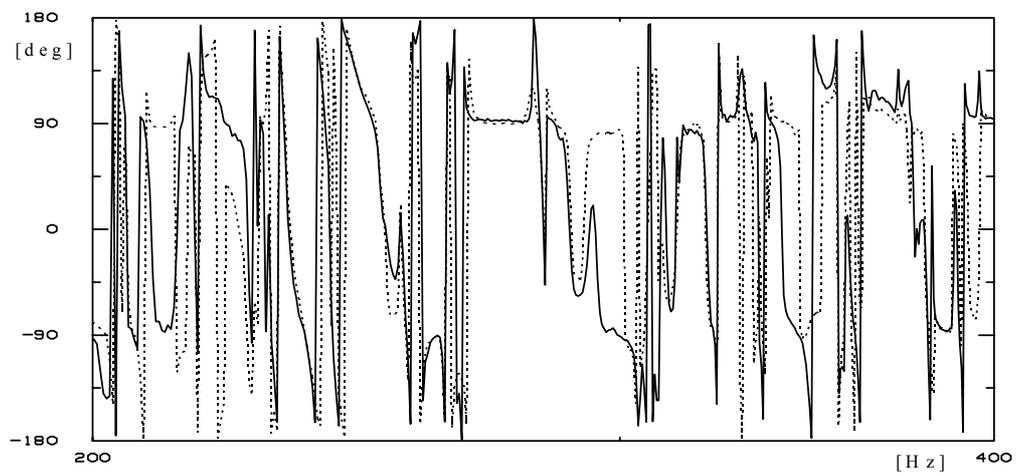


Figure 5.6 : Phase de la vitesse de la plaque 1, en fonction de la fréquence
mesures directe (—) et recomposée (.....) (deuxième partie)



(première partie)



(deuxième partie)

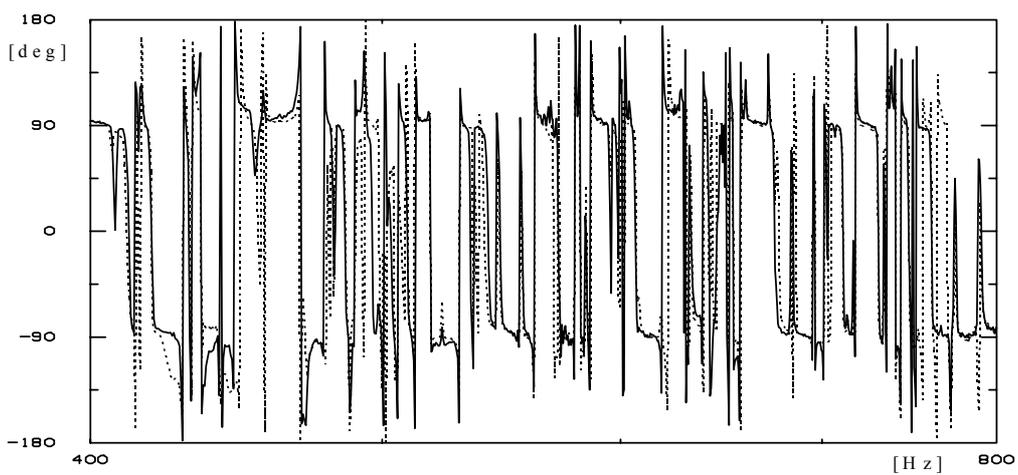


Figure 5.7 : Phase de la vitesse de la plaque 2 au point M_2 , en fonction de la fréquence, mesures directe (—) et recomposée (.....) (troisième partie)

Il reste à observer les vitesses représentées par bandes de tiers d'octaves. Celles-ci sont visibles en Figure 5.8 et Figure 5.9. Ce que laissaient prévoir les représentations en bandes fines se confirme ici, à savoir que la zone des fréquences 100-400 Hz montre une correspondance relativement médiocre entre la vitesse mesurée et la vitesse recomposée. En revanche, au-dessus de 400 Hz, l'accord entre les deux courbes est satisfaisant. Il faut noter que l'accord entre les courbes en bandes fines paraissait excellent, spécialement pour la plaque 1, alors qu'en tiers d'octaves, il subsiste une différence chronique d'environ 3 dB.

Le fait que le blocage des plaques ne soit pas bien vérifié en dessous de 400 Hz est particulièrement visible sur ces représentations en tiers d'octaves (la limite des 400 Hz est matérialisée par un pointillé vertical).

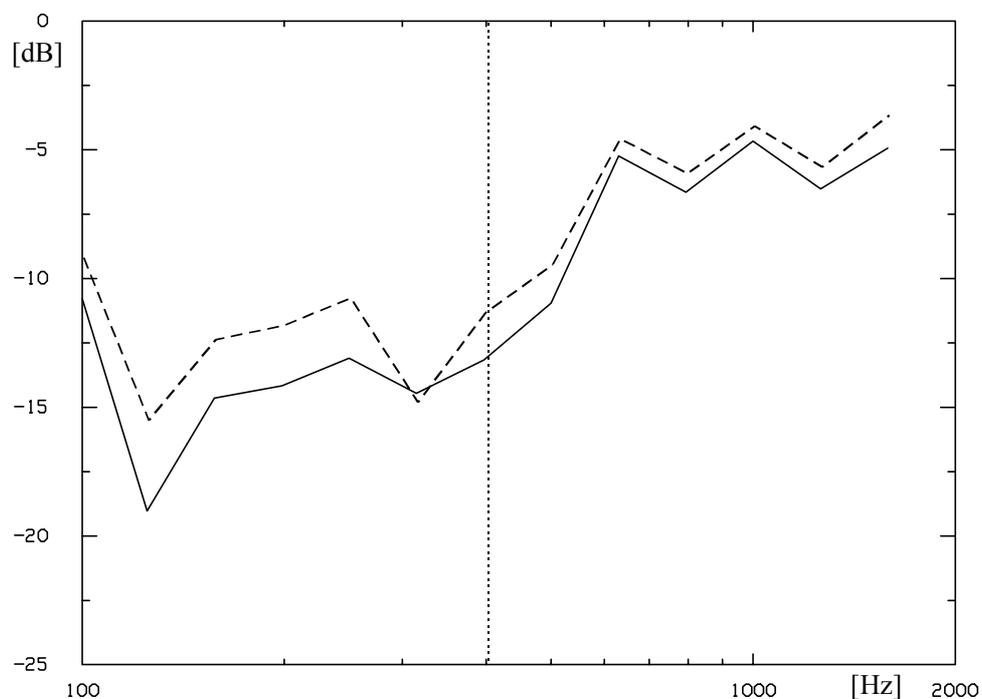


Figure 5.8 : Module de la vitesse de la plaque 1 au point M_1 , mesures directe (—) et recomposée (- - -) en fonction de la fréquence (représentation en tiers d'octave)

La vitesse de la plaque 2 appelle la même remarque : la recomposition de la vitesse couplée est très proche de la vitesse couplée directement mesurée, spécialement au-delà de 400 Hz. Les courbes se tiennent à 2 dB près.

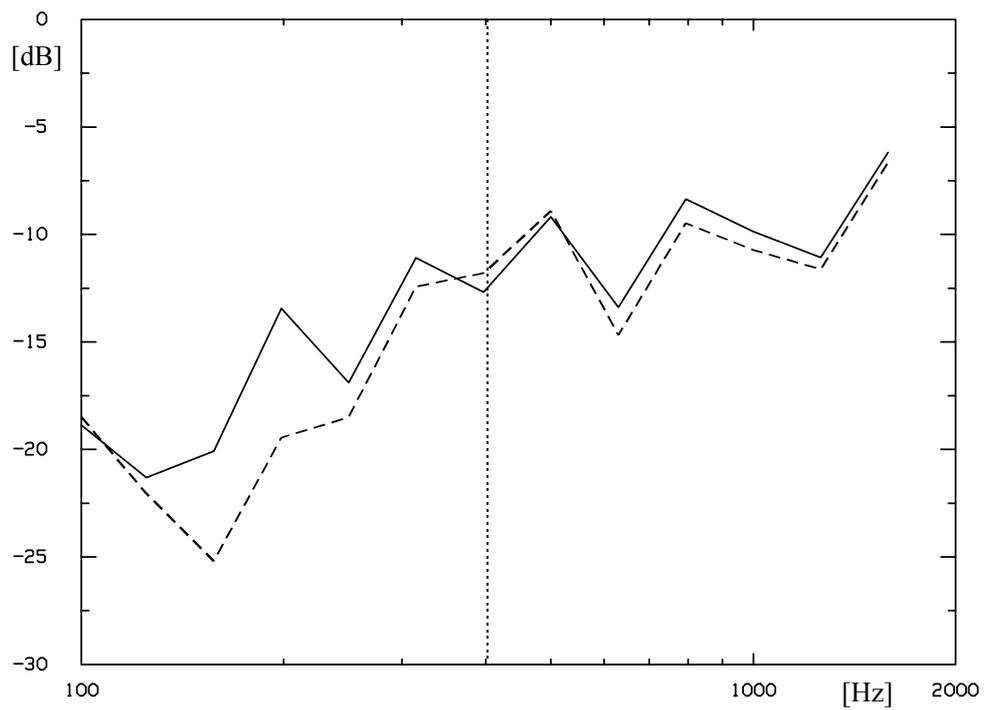


Figure 5.9 : Module de la vitesse de la plaque 2 au point M_2 , mesures directe (—) et recomposée (- - - -) en fonction de la fréquence (représentation en tiers d'octave)

5.4. CAS DE 3 LIAISONS

Ce paragraphe consacré au couplage par trois liaisons se divise en deux sous parties : l'une traite la recombinaison complète de la vitesse au point courant à partir des mesures de mobilités. L'autre s'appuiera sur la recombinaison complète pour mettre en œuvre la méthode simplifiée décrite au chapitre 4.

5.4.1. Description des mesures et nomenclature

Comme dans le cas du couplage par un seul ressort, les mesures de mobilité nécessaires au calcul de la solution en vitesse au point courant M se décomposent en 4 phases en ce qui concerne la position du pot et le couplage ou non des plaques (cf. § 5.3.1). Le nombre de mesures s'accroît en raison des nombreuses mesures de mobilités de transfert entre les points de couplage.

Le point d'excitation est sur la plaque 1. Les points courants sont notés M_1 et M_2 . Lors des mesures en configuration découplée bloquée, tous les ressorts des plaques sont bloqués par les masses prévues à cet effet.

La nomenclature s'établit comme suit. Les deux premiers caractères du nom indiquent sur quelle plaque la mesure est effectuée (et donc par extension quelle plaque est excitée). Ensuite, l'état des systèmes est rapporté par "BU" pour découplés bloqués et "C3" pour couplage par 3 ressorts. Suivent un ou deux chiffres qui indiquent quel(s) ressort(s) est (sont) concerné(s). Enfin, les deux dernières lettres permettent de connaître respectivement le point d'excitation où agit le pot vibrant et le point de mesure. Quelques exemples : P1BU2QM₁ signifie que l'on mesure la mobilité entre le point de couplage 2 et le point courant M_1 sur la plaque 1 découplée bloquée. P2BU3QQ donne la mesure de la mobilité d'entrée au point de couplage 3 de la plaque 2 découplée bloquée.

Le Tableau 5.6 résume toutes les mesures à faire dans le cas de trois liaisons, où i et j valent 1, 2, 3 (numéros des ressorts) :

Plaques concernées	Type de mobilité	Points d'application	Expression mathématique	Nom condensé
Plaque 1 BU	Mobilité d'entrée	Point d'excitation	$Y_i(F,F)$	P1BUiFF
Plaque 1 BU	Mobilité de transfert	Point d'excitation & Point de couplage	$Y_i(F,Q_i)$	P1BUiFQ
Plaque 1 BU	Mobilité de transfert	Point d'excitation & Point courant plaque 1	$Y(F,M_1)$	P1BUiFM ₁
Plaque 1 BU	Mobilité d'entrée	Point de couplage	$Y_i(Q_i,Q_i)$	P1BUiQQ
Plaque 1 BU	Mobilité de transfert	Point de couplage & Point courant plaque 1	$Y_i(Q_i,M_1)$	P1BUiQM ₁
Plaque 1 BU	Mobilité de transfert	Points de couplage	$Y_{ij}(Q_i,Q_j)$	P1BUijQQ
Plaque 2 BU	Mobilité d'entrée	Point de couplage	$Y_i(Q_i,Q_i)$	P2BUiQQ
Plaque 2 BU	Mobilité de transfert	Point de couplage & Point courant plaque 2	$Y_i(Q_i,M_2)$	P2BUiQM ₂
Plaque 2 BU	Mobilité de transfert	Points de couplage	$Y_{ij}(Q_i,Q_j)$	P2BUijQQ

Tableau 5.6 : Descriptif et nomenclature des mesures à effectuer dans le cas où les deux plaques sont couplées par trois ressorts : Les plaques sont en configuration découplée bloquée.

Il est à noter que certaines mesures se recoupent par réciprocity comme les mobilités de transfert entre les ressorts de couplages pour lesquelles 6 mesures suffisent au lieu de 9. La vérification de la réciprocity est montrée en Annexe 5.

Plaques concernées	Type de mobilité	Points d'application	Expression mathématique	Nom condensé
Plaques couplées	Mobilité de transfert	Point d'excitation & Point courant plaque 1	$Y(F,M_1)$	P1C3FM ₁
Plaques couplées	Mobilité de transfert	Point d'excitation & Point courant plaque 2	$Y(F,M_2)$	P1C3FM ₂

Tableau 5.7 : Descriptif et nomenclature pour mesurer directement la vitesse aux points courants des plaques couplées

5.4.2. Recomposition complète de la vitesse

Dans le cas du couplage par trois liaisons, on dispose des deux méthodes présentées aux § 4.1 et § 4.3 pour reconstruire la vitesse des plaques après couplage. La méthode basée sur l'utilisation des quantités propres isolées est la plus simple, puisqu'elle évite la recomposition des valeurs propres de couplage globales. En revanche, si on la choisit, seule la résolution simplifiée basée sur le chemin physique dominant pourra être appliquée. Cela suppose que les liaisons sont bien différenciées en raideur si l'on veut que la méthode donne des résultats probants (cf. § 4.4.1).

On peut aussi mettre en œuvre la résolution basée sur l'utilisation des valeurs propres de couplage globales, sachant que celle-ci est plus lourde à appliquer du fait de la recomposition des valeurs propres de couplage globales à partir des valeurs propres de couplage isolées. De toutes façons, dans l'optique d'une résolution simplifiée basée sur le chemin modal dominant, seule cette résolution est possible.

5.4.2.1. Méthode basée sur les quantités propres de couplage isolées

Le calcul des valeurs propres isolées passe par les mesures de mobilité d'entrée au droit des ressorts P1BUiQQ et P2BUiQQ ainsi que les mobilités de transfert P1BUijQQ et P2BUijQQ qui permettent de calculer les coefficients de correspondance $b_{k\ ij}$ des vecteurs propres isolés (cf. § 4.3.2 ou § A4.1). Les premières servent à déterminer les valeurs propres de couplage isolées, tandis qu'à l'aide des secondes, on peut remonter aux coefficients de correspondances $b_{k\ ij}$. Avec ces quantités, le calcul des termes de la matrice \overline{D} est immédiat.

Les coefficients propres α_i se calculent à partir des coefficients propres des systèmes découplés bloqués dont on donne l'expression :

$$\begin{cases} \alpha_{o1k} = \frac{w_{o1}(Q_k)}{\sqrt{Y_1(Q_k)}} = F \cdot \frac{Y_1(F, Q_k)}{\sqrt{Y_1(Q_k)}} \\ \alpha_{o2k} = \frac{w_{o2}(Q_k)}{\sqrt{Y_2(Q_k)}} = F \cdot \frac{Y_2(F, Q_k)}{\sqrt{Y_2(Q_k)}} \end{cases}$$

Eq. 5.9

Ces coefficients propres isolés s'expriment, pour chacune des N_k liaisons :

On a déjà vu que considérer les vitesses en un point courant permet de se servir uniquement d'expressions en fonction des mobilités. Par exemple, le vecteur propre de couplage isolé, considéré aux points courants M_1 et M_2 devient, pour les N_k ressorts :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{1k}(M_1) = \sum_i \varphi_{1ik} \cdot \psi_{1i}(M_1) = \sum_i \frac{1}{\sqrt{Y_1(Q_k)}} \frac{\psi_{1i}(Q_k)}{Z_{11i}} \psi_{1i}(M_1) = \frac{Y_1(Q_k, M_1)}{\sqrt{Y_1(Q_k)}} \\ \varphi_{2k}(M_2) = \sum_i \varphi_{2ik} \cdot \psi_{2i}(M_2) = \sum_i \frac{1}{\sqrt{Y_2(Q_k)}} \frac{\psi_{2i}(Q_k)}{Z_{22i}} \psi_{2i}(M_2) = \frac{Y_2(Q_k, M_2)}{\sqrt{Y_2(Q_k)}} \end{array} \right.$$

Eq. 5.10

On dispose maintenant de toutes les quantités nécessaires à la recombinaison de la vitesse des plaques couplées, selon l'Eq. 4.49.

Dorénavant, on n'utilisera que cette méthode pour recombinaison la vitesse des plaques après couplage.

5.4.2.2. Méthode basée sur les quantités propres de couplage globales

Pour bien comprendre la méthode, on la scinde en deux parties distinctes avec la détermination des quantités propres globales d'une part, et la reconstruction de la solution en vitesse d'autre part.

Il faut tout d'abord appliquer la méthode décrite au paragraphe § 4.5.3. en calculant les valeurs propres de couplage globales à partir des valeurs propres de couplage isolées. En effet, les mesures de mobilités d'entrée au droit des ressorts correspondent à une configuration isolée et donc la valeur propre de couplage que l'on reconstruira à partir de ces mobilités expérimentales sera de type isolée. De toute façon, expérimentalement comme analytiquement, c'est la seule méthode pour accéder aux valeurs propres de couplage globales lesquelles sont indispensables pour déterminer laquelle est dominante.

Le paragraphe précédent a indiqué que les mesures faites permettent de retrouver les valeurs propres de couplage isolées et les coefficients de correspondance. Ainsi, on peut calculer les termes de la matrice $\overline{\overline{V}}$ dont les valeurs propres sont les valeurs propres de couplage globales et dont les vecteurs propres sont les coefficients de la matrice $\overline{\overline{A}}$ (ils permettent de construire les vecteurs propres globaux à partir des vecteurs propres isolés). Il est évident que comme cette approche expérimentale se dispense des bases modales, les vecteurs propres ne sont pas connus. Malgré tout, on a quand même besoin des coefficients de la matrice $\overline{\overline{A}}$ pour pouvoir connaître les coefficients propres globaux ρ_i et ρ_{oi} des quantités propres.

Les vecteurs vitesse de chaque plaque sont écrits en faisant apparaître les coefficients de la matrice $\overline{\overline{A}}$:

$$\begin{cases} \vec{w}_1 = \vec{w}_{o1} + \sum_j \sum_i \frac{\Lambda_j^2}{1 - \Lambda_j^2} \rho_{o1j} a_{1ij} \vec{\phi}_{1i} \\ \vec{w}_2 = \sum_j \sum_i \frac{\Lambda_j}{1 - \Lambda_j^2} \rho_{o2j} a_{2ij} \vec{\phi}_{2i} \end{cases}$$

Eq. 5.11

L'Eq. 5.11, sous forme vectorielle, présente encore des inconnues par les termes ρ_o . Ceux-ci se s'obtiennent à partir des coefficients propres isolés des vitesses des systèmes découplés bloqués, α_o , et de la matrice $\underline{\underline{D}}$ décrite dans le § 4.3.. Trop de termes s'imbriquent pour que l'on puisse écrire la solution au point courant dans une seule expression analytique et de manière aussi simple que dans le cas du couplage par un seul ressort.

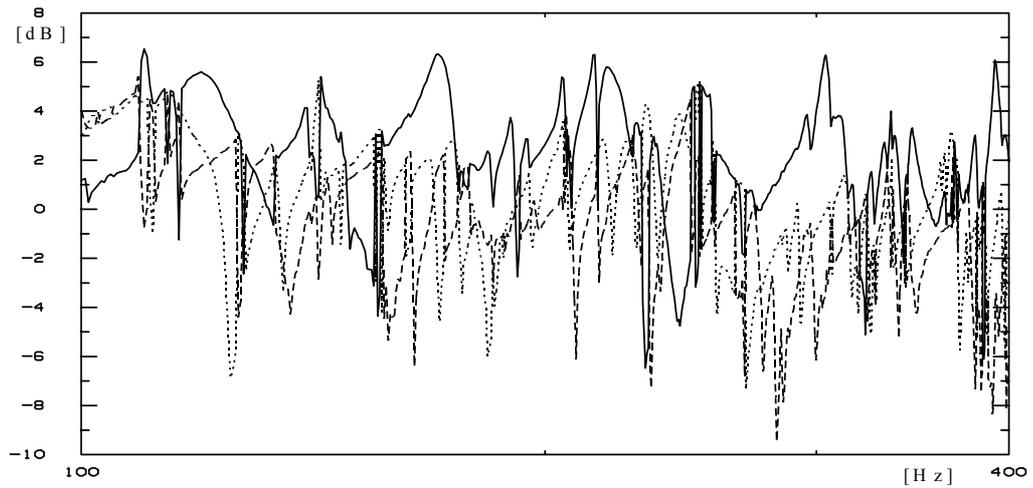
Enfin, on calcule les coefficients propres globaux ρ_{oi} en résolvant l'équation faisant intervenir la matrice $\underline{\underline{E}}$ et les coefficients propres isolés α_{oi} .

Il ne reste plus qu'à écrire toutes ces quantités en fonction des fichiers de mesures de mobilités. Ceci avait été possible dans le cas d'un seul couplage. Ici, trop de manipulations sont nécessaires pour transformer les quantités isolées en quantités globales pour espérer écrire une relation "analytique" complète. En tout état de cause, la démarche est exactement la même que dans le cas du couplage unique, à savoir qu'étant donné que toutes les mobilités sont mesurées pour une même force d'excitation F , ce terme se simplifie et l'on obtient des expressions uniquement dépendantes des mobilités.

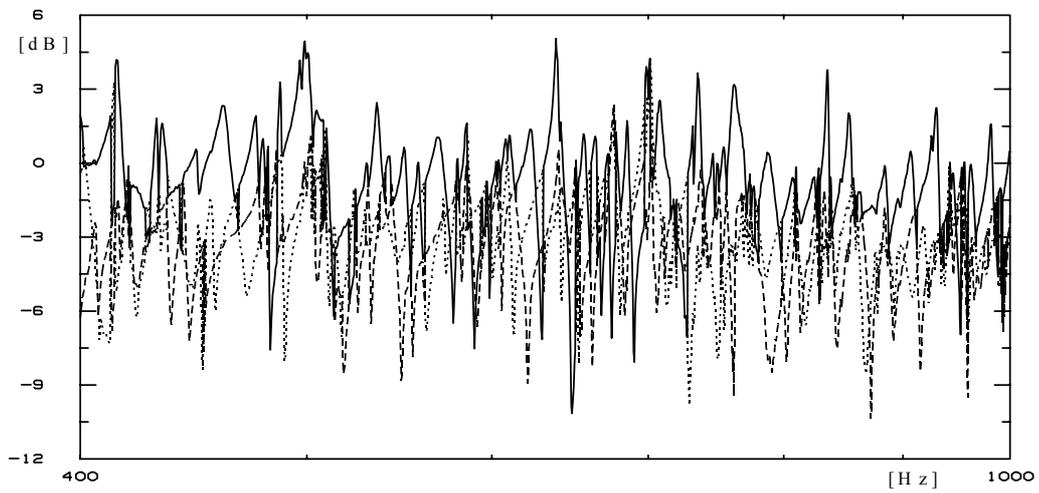
5.4.3. Résultats de l'expérience

5.4.3.1. Valeurs propres de couplage

Les résultats expérimentaux concernant les valeurs propres de couplage sont maintenant présentés. En accord avec la théorie du chapitre 4, le calcul des valeurs propres de couplage globales s'effectue à partir des valeurs propres de couplage isolées qui sont directement accessibles à la mesure ; il suffit de connaître les raideurs et les mobilités d'entrée de chaque ressort quand les plaques sont découplées bloquées.



(Première partie)



(deuxième partie)

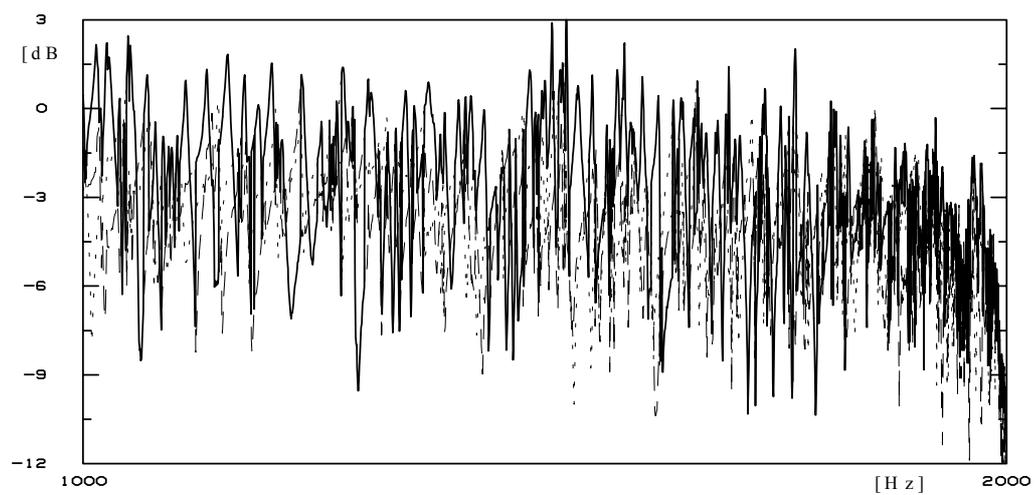


Figure 5.10 : Modules des 3 valeurs propres de couplage globales expérimentales en fonction de la fréquence (troisième partie)

Le cas du couplage par un seul ressort avait montré que la valeur propre de couplage correspondante atteignait un niveau assez élevé ; pour 3 ressorts identiques, le couplage devrait être encore plus fort.

La Figure 5.10 montre les valeurs propres de couplage globales sur trois courbes (densité modale oblige). On constate qu'effectivement l'intensité atteinte par les trois valeurs propres de couplage reste aux alentours de 0 dB jusqu'à 1000 Hz. Ensuite, une légère décroissance s'amorce bien que la plus grande des valeurs propres de couplage continue à osciller autour de 0 dB. Dans ces conditions, la condition de couplage faible est loin d'être remplie.

On peut remarquer l'apparition de problèmes numériques qui provoquent des sauts dans les valeurs propres. Du point de vue de la résolution, cela n'a pas beaucoup d'importance puisque les valeurs propres sont triées à chaque pas de fréquence. La notion de continuité n'entre pas en ligne de compte.

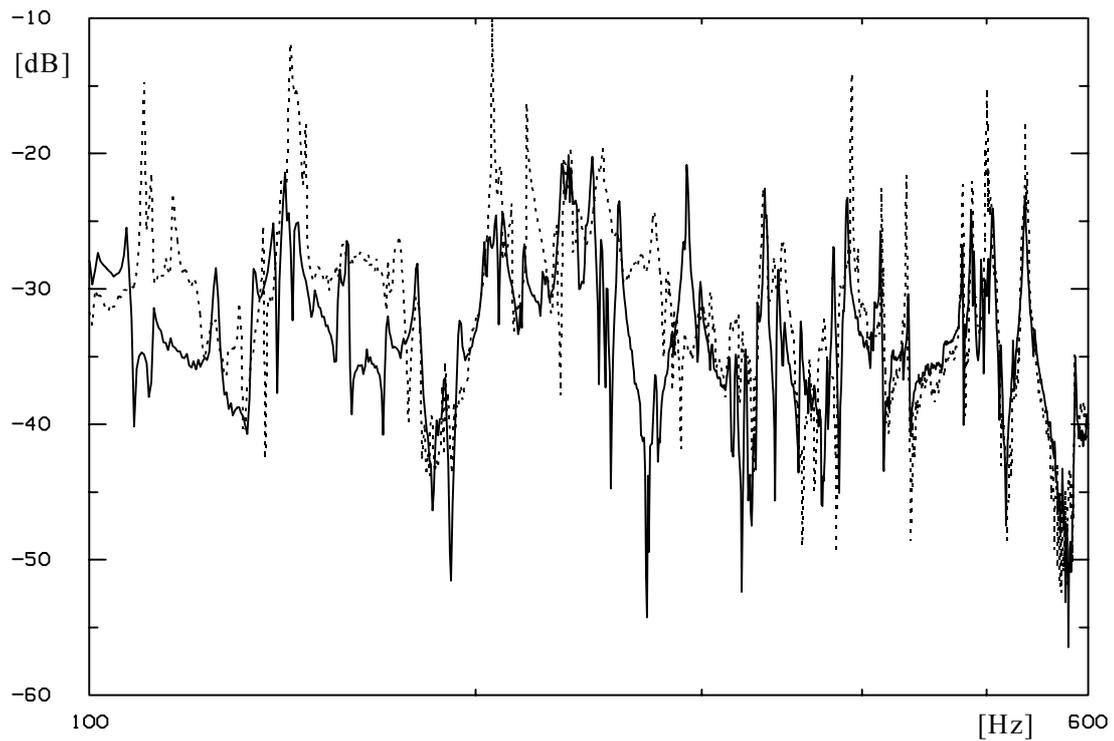
5.4.3.2. vitesses

Cette expérience réalisée avec trois ressorts de couplage implique le même type de résultats que le cas d'un seul ressort de couplage, c'est-à-dire la comparaison entre une mesure directe de la vitesse en un point courant et la reconstruction de cette vitesse à partir de mesures de mobilités d'entrée et de transfert entre certains points de la plaque (donc, une comparaison de deux quantités identiques puisque la reconstruction est complète). La différence essentielle entre ces deux mesures est le nombre de données à manipuler, qui croît très rapidement dans le cas de la recombinaison.

Encore une fois, l'observation de ces différentes courbes, tracées à partir de 100 Hz en raison de problèmes de modes apparus dans les supports des masses bloquantes, montre des résultats très satisfaisants au dessus de 400 Hz. Ceci est vrai aussi bien pour la plaque 2 que pour la plaque 1, bien que cette dernière bénéficie théoriquement³ de l'avantage de la contribution de la vitesse de la plaque découplée bloquée, $w_{o1}(M_1)$, qui est prépondérante dans le résultat de la recombinaison.

Il faut noter que la recombinaison de la vitesse de la plaque 1 présente des pics beaucoup plus marqués que dans le cas couplé. Cela signifie que les pertes des systèmes couplés sont plus importantes que celles des systèmes découplés bloqués (cf. § 3.3.2). Cela semble logique dans la mesure où la plaque 1 couplée est aussi amortie par la plaque 2 alors que les plaques découplées bloquées ne peuvent pas espérer être amortie par les masses bloquantes.

³ Dans le cas traité, on a vu, grâce à la valeur propre de couplage, que le couplage est fort. Donc, la contribution du couplage peut être relativement conséquente par rapport à la vitesse découplée bloquée.



(première partie)

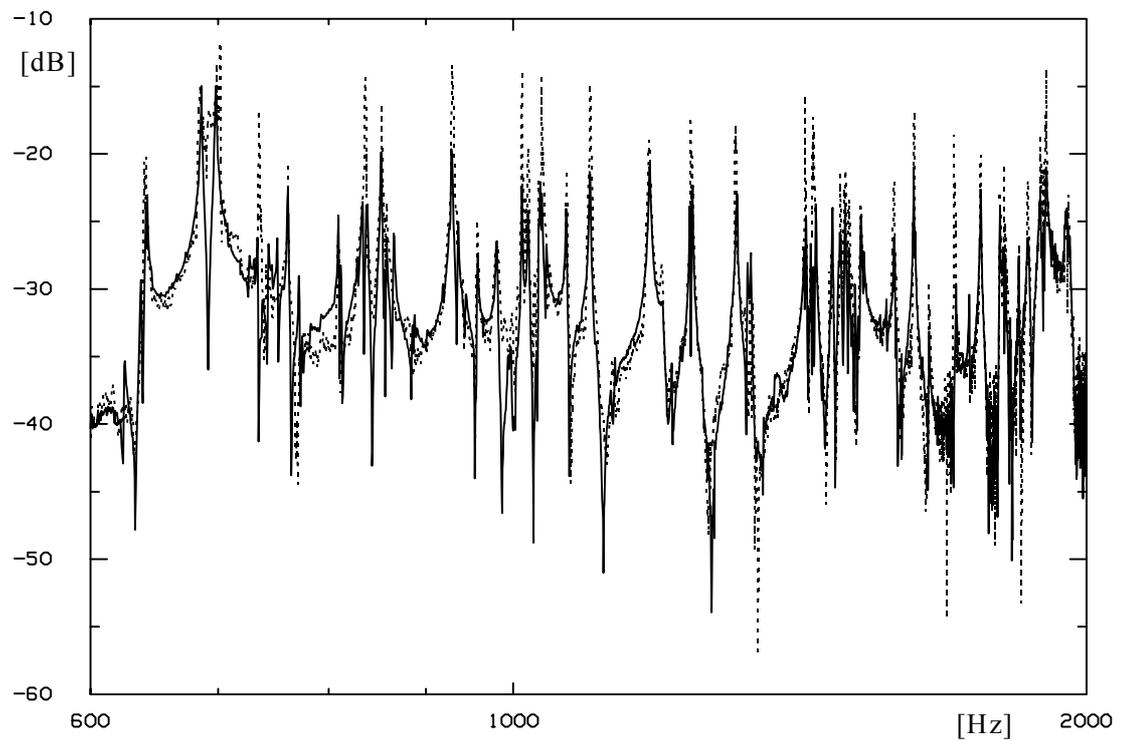
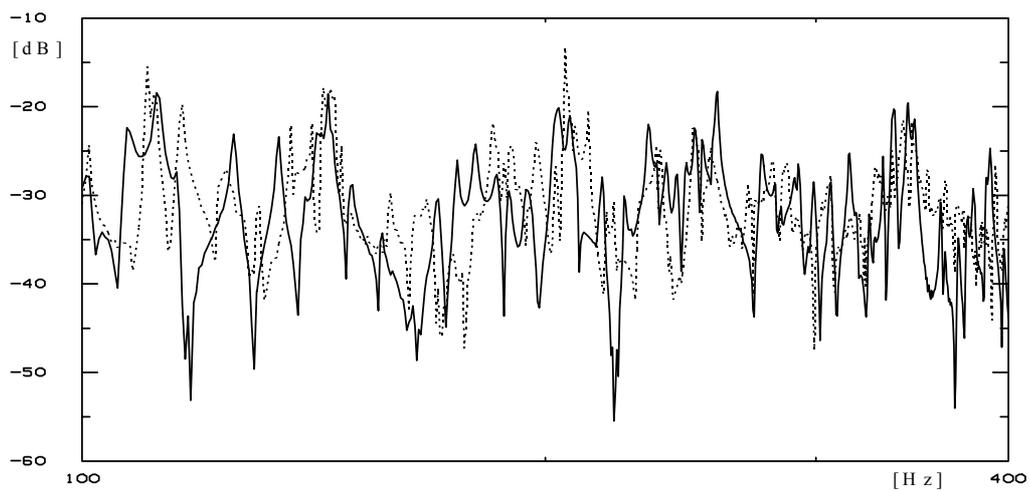
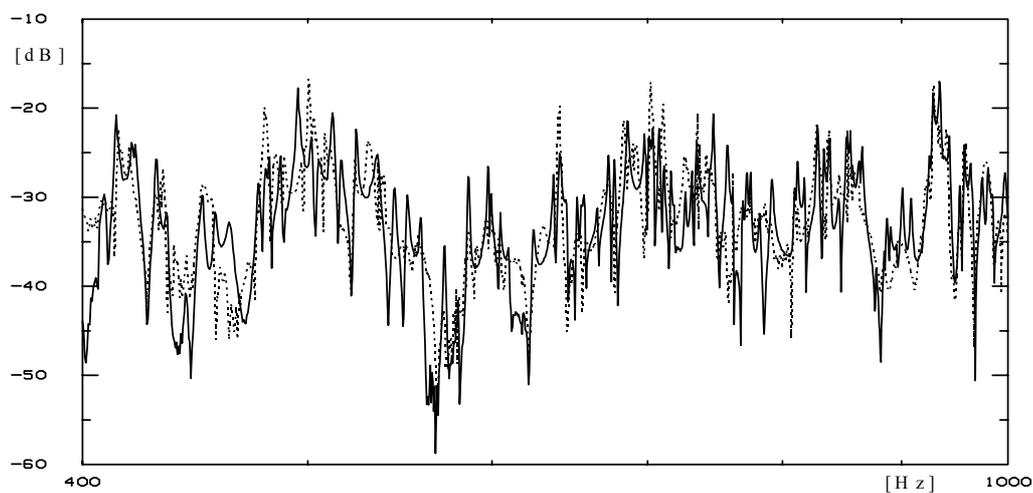


Figure 5.11 : Module de la vitesse de la plaque 1 au point M_1 ,
mesures directe (—) et recomposée(.....) en fonction de la fréquence (deuxième partie)



(première partie)



(deuxième partie)

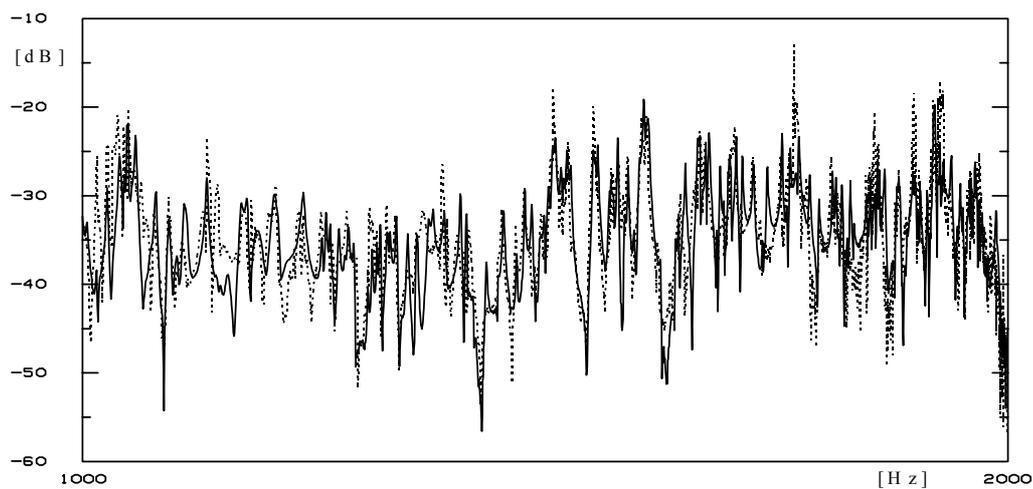


Figure 5.12 : Module de la vitesse de la plaque 2 au point M_2 , mesures directe (—) et recomposée (.....) en fonction de la fréquence (troisième partie)

Les représentations en tiers d'octave des vitesses de chaque plaque sont montrées en Figure 5.13 et Figure 5.14.

La représentation en tiers d'octave de la vitesse montre des différences plus marquées que ne le laissait supposer la représentation en bandes fines. La plaque 1 fait apparaître une vitesse recomposée qui surestime la vitesse directement mesurée. Il faut se souvenir qu'aucune des deux courbes ne représente une référence absolue, ce qui n'était pas le cas lors des applications numériques du chapitre précédent. Néanmoins, il paraît assez logique de considérer la courbe représentant la vitesse directement mesurée au point courant comme étant plus fiable que celle issue d'une recombinaison faisant intervenir de très nombreuses autres mesures.

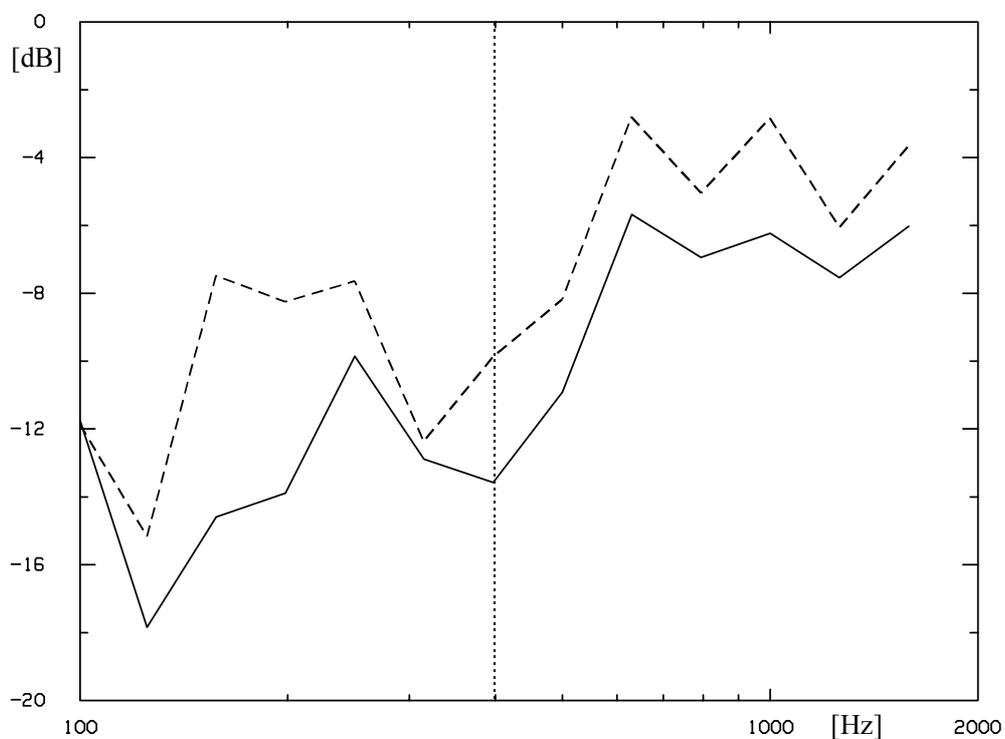
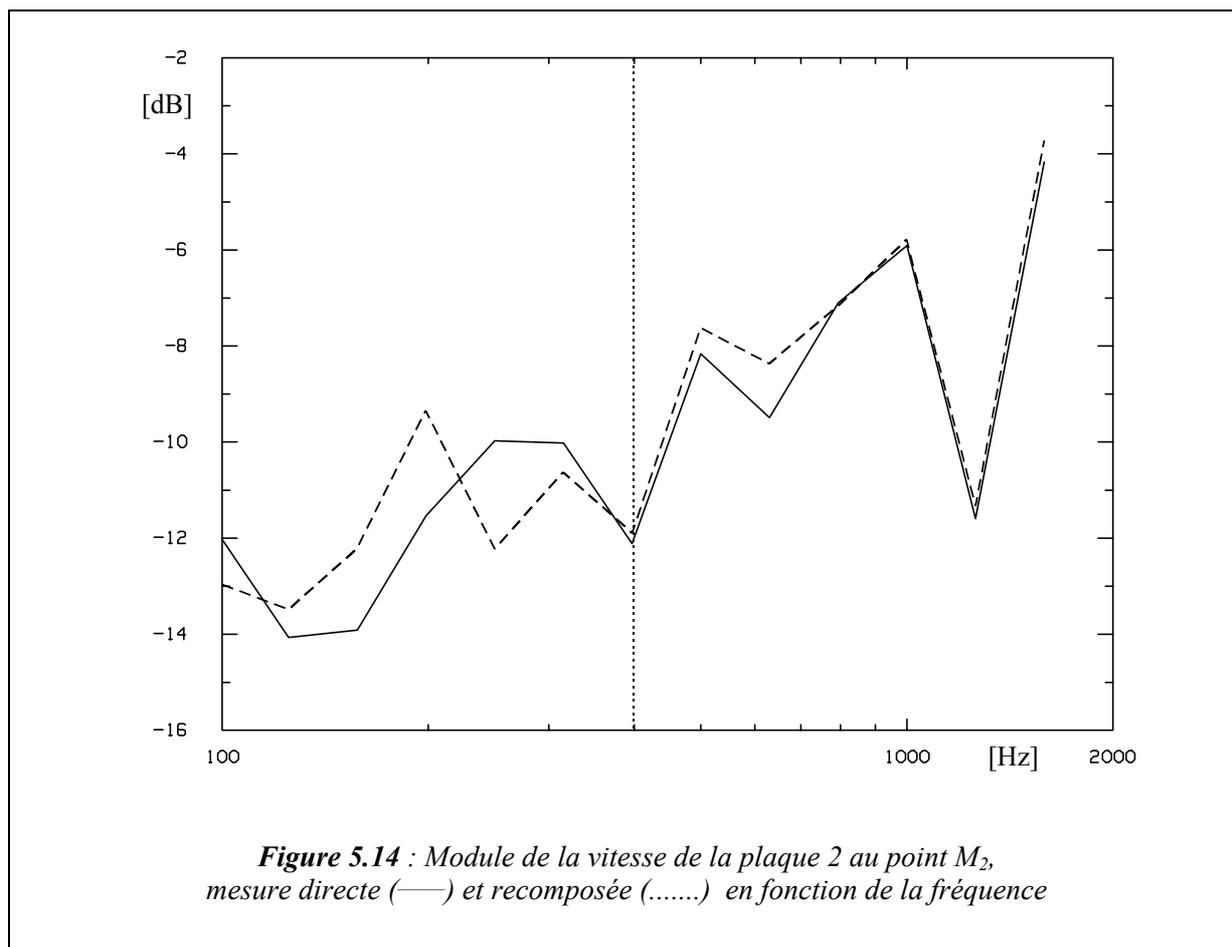


Figure 5.13 : Module de la vitesse de la plaque 1 au point M_1 , mesures directe (—) et recomposée (.....) en fonction de la fréquence



La surestimation peut venir de l'acuité des pics observée dans la représentation en bandes fines. Si une différence de niveau est sans conséquence lorsqu'elle se produit sur une anti-résonance⁴ (zone de basse énergie), lorsqu'elle se produit sur un pic, elle peut considérablement modifier une représentation en tiers d'octave.

Si l'on se place au-dessus de 400 Hz, la différence entre les deux courbes reste aux alentours de 3 dB. Quant à la plaque 2, elle offre un résultat très satisfaisant. Sur l'ensemble du spectre, la différence entre les deux mesures se limite à ± 3 dB. On notera en outre, le très bon accord sur l'octave 1000 et 2000 Hz, où la conjonction est presque parfaite.

S'il ne faut pas oublier que la vitesse mesurée directement et la vitesse recomposée sont théoriquement égales, il ne faut pas non plus perdre de vue que la recombinaison utilise quelque 28 fichiers de mesures de mobilités, ces fichiers subissant des traitements assez complexes (recherche de la valeur propre de couplage globale à partir des valeurs propres isolées, etc.). Enfin, le fait de mesurer la vitesse seulement en un point au lieu de faire la

⁴ Ce qu'on avait pu constater dans le calcul de la résolution simplifiée du chapitre 4. La vitesse de la plaque 2 en bandes fines présentait d'importantes sous-estimations aux anti-résonances, lesquelles n'apparaissaient pas dans la représentation en tiers d'octaves

vitesse moyenne de la plaque est particulièrement défavorable. Dans ces conditions, il est d'autant plus remarquable de constater à quel point les résultats obtenus sont bons.

D'un point de vue expérimental, la seule difficulté de cette approche est de pouvoir obtenir une bonne condition découplée bloquée. En effet, une fois celle-ci atteinte, la méthode des valeurs propres de couplage montre de telles qualités de robustesse et de stabilité que les résultats obtenus sont excellents. D'ailleurs, même quand la condition découplée bloquée n'est pas parfaitement réalisée, les résultats sont quand même très honorables.

La méthode des mobilités et la méthode des valeurs propres de couplage utilisent toutes deux des mesures de mobilités, la première des mobilités découplées libres tandis que la seconde, des mobilités découplées bloquées. Malgré la faible différence apparente entre ces deux types de mesures, il faut noter que la méthode des mobilités génère des fréquences singulières [Naji 1993] qui perturbent la fiabilité de la résolution alors que la méthode des valeurs propres de couplage est très robuste.

Remarque : Choix de la méthode simplifiée

Si la recombinaison complète de la vitesse s'est basée sur l'utilisation des quantités propres de couplage isolées (cf. § 4.3), la résolution simplifiée qui suit n'utilisera que le chemin modal dominant, c'est-à-dire le tri des valeurs propres de couplage globales. En effet, dans le plan d'expérience initial ne figurait pas encore la vérification de la résolution simplifiée basée sur le chemin physique dominant, puisque celle-ci n'a chronologiquement été développée qu'après la fin des expériences. Or pour se placer dans les conditions les plus défavorables vis-à-vis de la méthode basée sur le chemin modal dominant, les 3 ressorts avaient été choisis identiques. Dans ces conditions, l'utilisation de la méthode basée sur le chemin physique dominant ne pouvait donner aucun résultat intéressant, comme l'ont montré les résultats numériques du § 4.4.2..

5.4.4. Résolution simplifiée

La résolution simplifiée consiste à ne prendre en compte, dans la participation du couplage à la solution en vitesse, que le chemin modal dominant. L'aspect théorique de cette résolution a déjà été abordé au § 4.2.. Dans le cadre de l'approche expérimentale, cette résolution simplifiée est mise en œuvre. Il faut préciser d'emblée que le but de la méthode n'est pas ici de trouver un moyen astucieux qui permettrait de calculer une solution approchée (mais réaliste) à partir d'un nombre très limité de mesures, mais plutôt de juger si le fait de ne prendre en compte qu'un seul chemin de transmission est aussi performant dans le cadre d'une approche expérimentale que dans le cas d'un calcul numérique, comme l'a montré le résultat du § 4.2..

S'il est vrai que la résolution simplifiée peut être optimisée par l'intermédiaire des coefficients propres, il n'en est pas moins vrai que l'application numérique du § 4.2. a montré que la différence entre les résolutions simplifiée et tronquée tourne à l'avantage de cette dernière. Ainsi, dans cette approche expérimentale, ce sera la troncature qui sera appliquée à la résolution simplifiée basée sur le chemin modal dominant.

Le traitement numérique qui suit l'acquisition des données effectue un tri des valeurs propres de couplage globales selon le critère $|\lambda/(1-\lambda^2)|$, et partant de là, reconstruit la part due au couplage en n'utilisant que les quantités associées à cette valeur propre. On se retrouve presque dans la configuration d'un seul ressort de couplage à la différence près que la configuration découplée bloquée inclut toujours les 3 couplages.

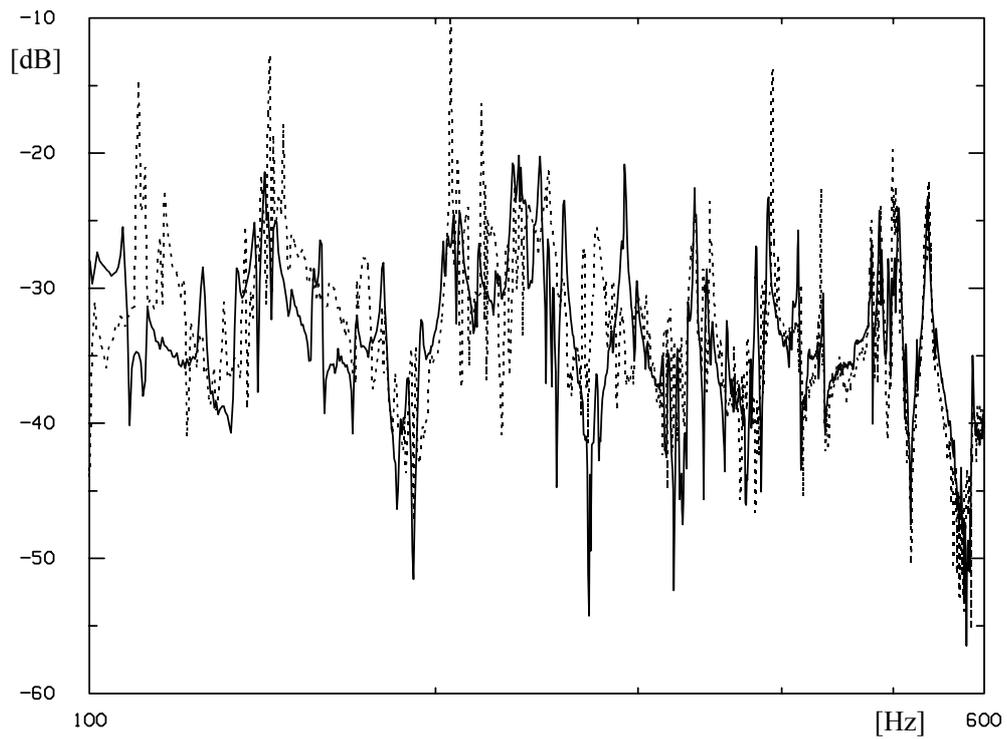
5.4.5. Résultats expérimentaux de la résolution simplifiée

La Figure 5.15 donne la représentation de la vitesse de la plaque 1, recomposée simplifiée par rapport à la vitesse mesurée directement (en bandes fines). Première constatation (c'est une constante tout au long de ces courbes expérimentales et l'explication a déjà été donnée) la bande 100-400 Hz n'offre pas une grande similarité de résultats. Au-delà de cette limite, la concordance des courbes est excellente. Le fait que l'excitation soit justement sur cette plaque va de toute façon dans ce sens.

La Figure 5.16 concerne la plaque 2, dans les mêmes conditions. On observe le phénomène déjà rencontré lors des applications numériques du chapitre 4, à savoir une nette tendance à sous-estimer les anti-résonances, c'est-à-dire aux endroits où intervient un croisement des plus grandes valeurs propres de couplage, elles-mêmes étant généralement dans une zone de couplage faible.

En dehors de cette tendance, la qualité de la recombinaison est très bonne, compte tenu du fait qu'un seul chemin (sur les trois) est pris en compte à chaque pas en fréquence.

Dans la bande 1000-2000 Hz, on retrouve les sous-estimations aux anti-pics déjà observées dans la résolution simplifiée du chapitre 4.



(première partie)

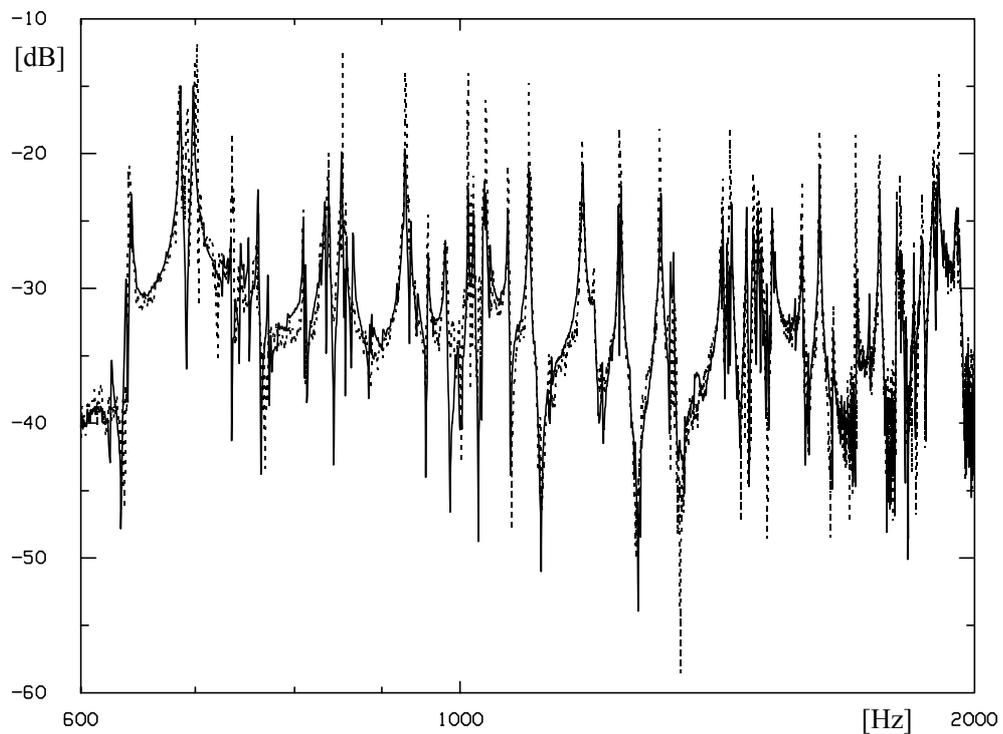
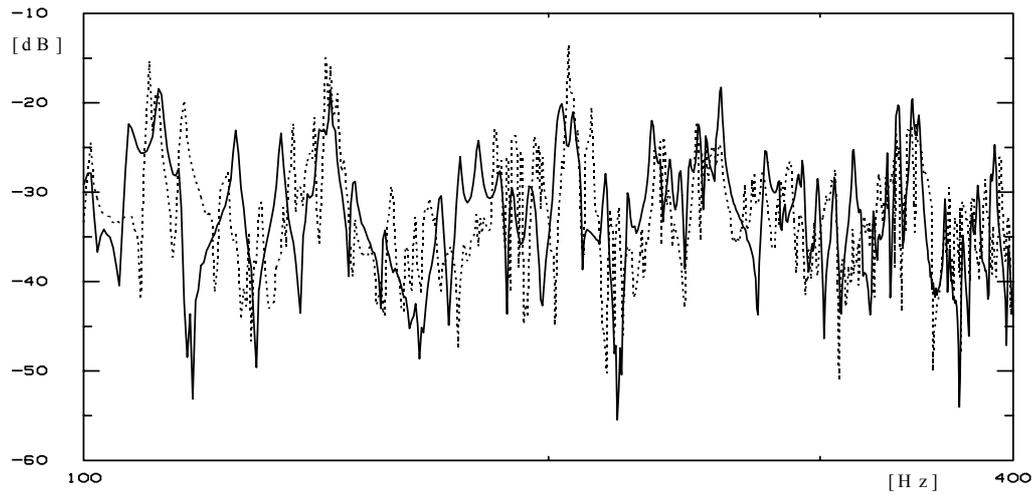
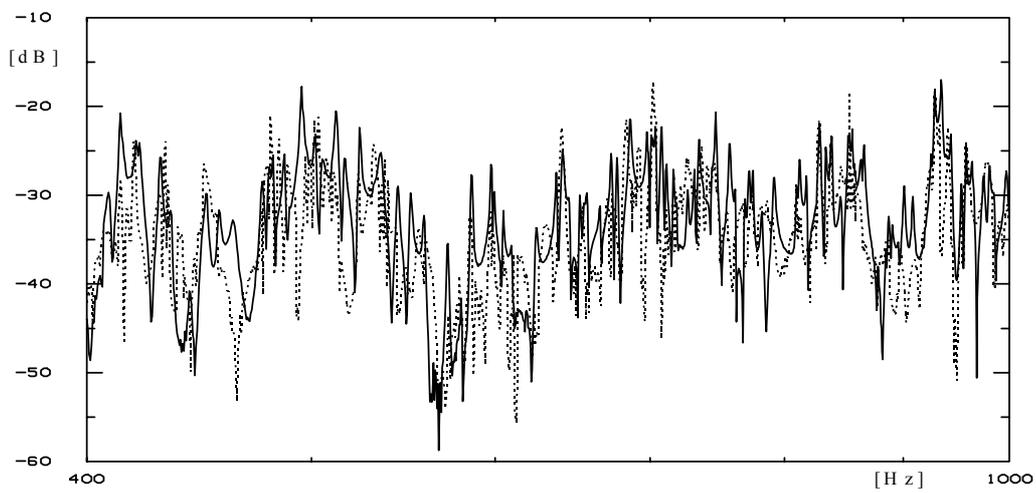


Figure 5.15 : Module de la vitesse de la plaque 1 au point M_1 , mesure directe (—) et résolution simplifiée (.....) en fonction de la fréquence (deuxième partie)



(Première partie)



(deuxième partie)

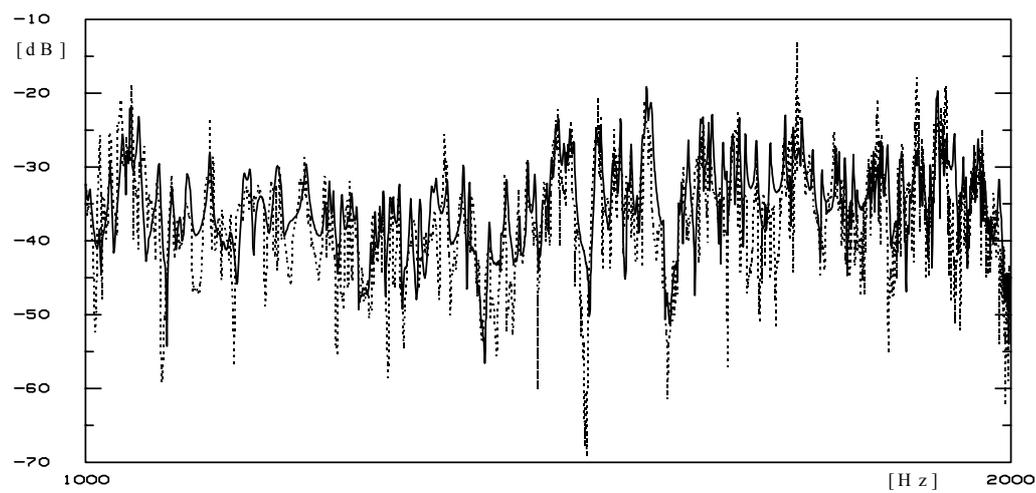


Figure 5.16 : Module de la vitesse de la plaque 2 au point M_2 , mesure directe (—) et résolution simplifiée (.....) en fonction de la fréquence (troisième partie)

Les représentations en tiers d'octave de ces vitesses directement mesurées d'une part et recomposées puis simplifiées d'autre part, sont maintenant observées en Figure 5.17 et Figure 5.18, et analysées.

En plus des deux courbes présentes sur la représentation en bandes fines, on a ajouté sur cette figure la recombinaison simplifiée, dont le critère de tri des valeurs propres de couplage est basé directement sur la plus grande des valeurs propres de couplage, $|\lambda|$, en module, et non pas sur $|\lambda/(1-\lambda^2)|$. En ce qui concerne la plaque 1, cela n'apporte pas d'amélioration déterminante. La bande 800-2000 Hz montre que les deux critères de résolutions donnent le même résultat, ce qui signifie que le couplage est faible puisqu'il n'y a que dans ce cas que le critère de tri n'a pas d'importance. Pourtant, la représentation de la valeur propre de couplage (cf. Figure 5.10) a montré des valeurs propres de couplage oscillant autour de 0 dB, ce qui est le gage d'un couplage fort. Il faut donc remettre en question la fiabilité du résultat des valeurs propres de couplage.

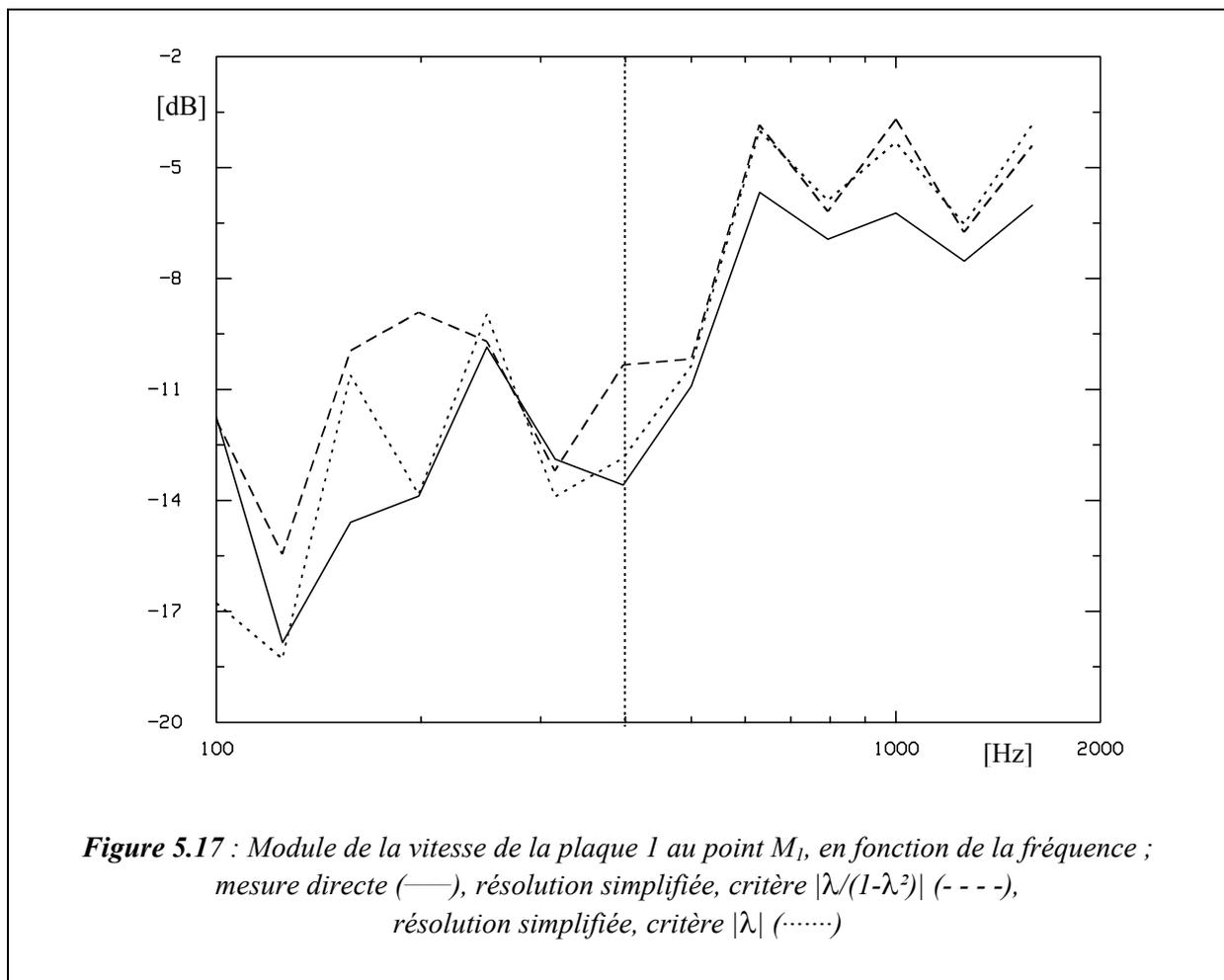
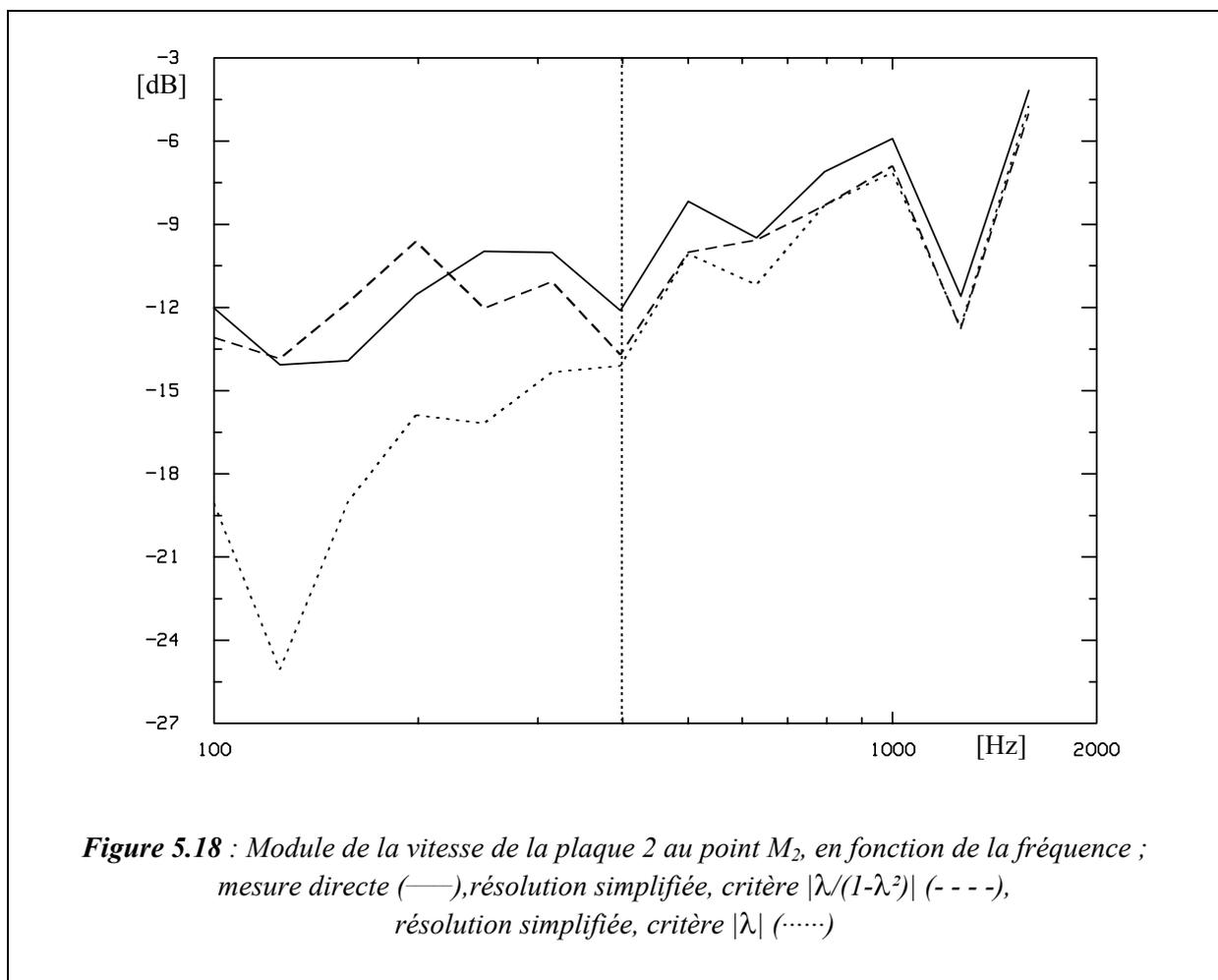


Figure 5.17 : Module de la vitesse de la plaque 1 au point M_1 , en fonction de la fréquence ;
 mesure directe (—), résolution simplifiée, critère $|\lambda/(1-\lambda^2)|$ (- - -),
 résolution simplifiée, critère $|\lambda|$ (.....)

Ces valeurs propres de couplage dépendent d'une part des mobilités d'entrée, et d'autre part, de la raideur de la barrette qui a été mesurée en configuration statique. L'Annexe 5 montre, par une mesure dynamique de la mobilité de la barrette de liaison, que la raideur statique ($8,59 \cdot 10^6 \text{ N.m}^{-1}$) utilisée dans la recombinaison des valeurs propres de couplage globales est sûrement surestimée, ce qui expliquerait en partie la surestimation des valeurs propres de couplage et donc des recombinaisons de la vitesse.

Entre 400 et 800 Hz, le recombinaison donne de bons résultats quand on la compare à la vitesse mesurée directement au point courant, alors qu'en dessous de 400 Hz, les résultats sont toujours médiocres.



La comparaison des vitesses sur la plaque 2 permet de montrer des résultats très intéressants. On rappelle que la plaque 2 n'étant pas directement excitée, le niveau de vitesse qu'elle présente n'est dû qu'à la transmission par le couplage des vibrations de la plaque 1. Aussi, la moindre erreur dans la participation du couplage entraîne des erreurs

particulièrement importantes dans le niveau de vitesse résultant, la vitesse de la plaque découplée bloquée $w_o(M_2)$ étant nul, il ne vient rien masquer.

L'information essentielle à retirer de cette figure vient de l'excellente performance de la recombinaison simplifiée (avec le critère $|\lambda/(1-\lambda^2)|$), sur l'ensemble de la bande fréquentielle. La différence entre les deux courbes reste dans une marge de ± 2 dB, alors qu'un seul des trois chemins de transmission du couplage est pris en compte. En revanche, la recombinaison simplifiée utilisant le critère $|\lambda|$, échoue puisqu'elle sous-estime la vitesse directement mesurée de 12 dB sur le début de la bande.

Il est vrai que dans la bande 100-400 Hz, les résultats n'ont jamais été très satisfaisants. Mais il est aussi vrai que dans cette bande, les vitesses recomposées avaient l'habitude de surestimer la vitesse mesurée au point courant (raideur du ressort de couplage trop forte). C'est la première fois qu'un tel déficit est observé, ce qui confirme s'il était besoin la pertinence du critère $|\lambda/(1-\lambda^2)|$.

L'information ne serait pas complète si les recombinaisons complète ou simplifiée n'étaient pas comparées, en tiers d'octave, à la mesure directe de la vitesse de chacune des plaques. Ces courbes sont présentées sur la Figure 5.19 et la Figure 5.20.

Il s'agit cette fois de comparer la performance de la recombinaison complète par rapport à la recombinaison simplifiée. Dans les deux figures, on observe le même résultat : la recombinaison simplifiée de la vitesse donne toujours un niveau légèrement inférieur au niveau atteint par la recombinaison complète. Résultat très cohérent puisque d'une part, la recombinaison simplifiée n'utilise qu'un seul chemin de transmission et, d'autre part les facteurs propres n'étant pas optimisés, ce chemin vient de la simple troncature de la recombinaison complète.

En ce qui concerne le niveau global atteint par les deux recombinaisons par rapport à la mesure directe de la vitesse, on ne peut que répéter les raisons déjà invoquées auparavant : une probable surestimation de la raideur du ressort, qui implique une surestimation de la vitesse lors de la recombinaison et une mauvaise estimation des pertes provoquant des pics très accentués des résonances, et donc, une surestimation de la vitesse en tiers d'octaves.

Pour donner une conclusion à ce paragraphe consacré à la résolution simplifiée, on ne peut que constater l'excellence des résultats obtenus. Il est vrai que l'approche expérimentale a montré une grande robustesse lors des recombinaisons complètes pour une ou trois liaisons et que le chapitre 4 a fourni des résultats numériques de grande qualité avec la méthode simplifiée.

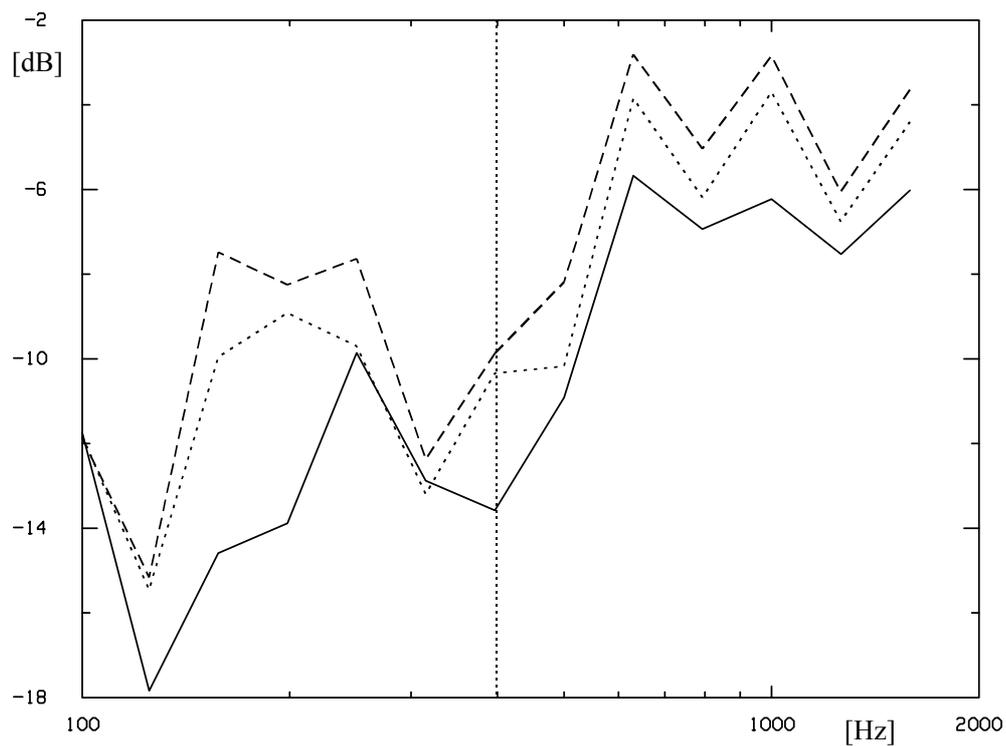


Figure 5.19 : Module de la vitesse de la plaque 1 au point M_1 , en fonction de la fréquence, mesure directe (—), résolution complète (- - -), résolution simplifiée, critère $|\lambda/(1-\lambda^2)|$ (.....)

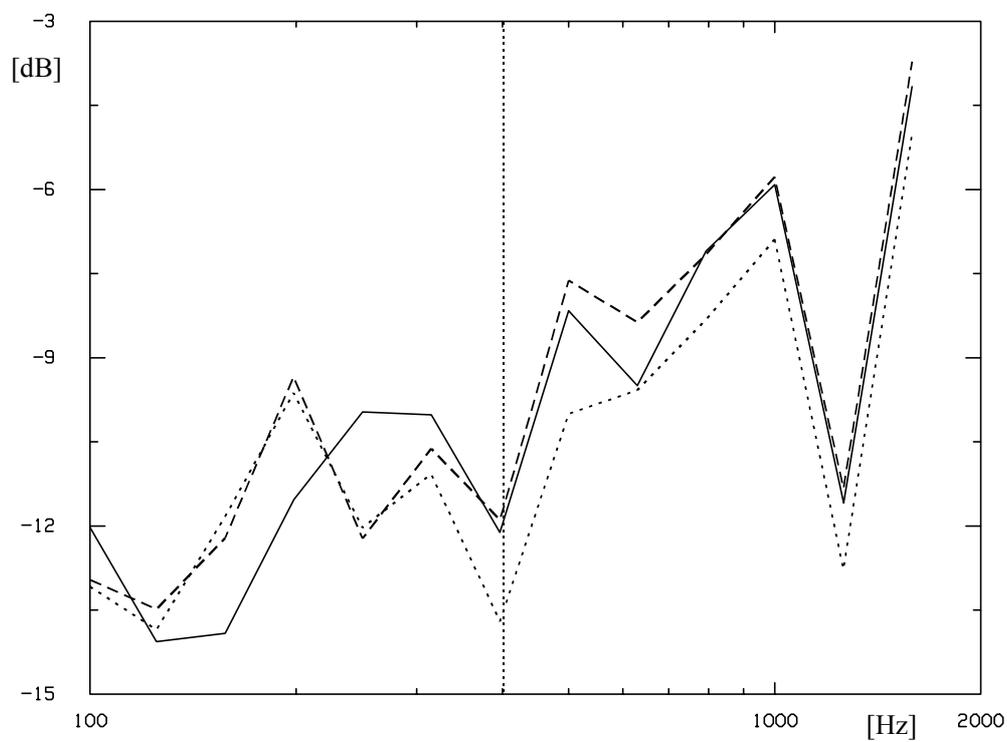


Figure 5.20 : Module de la vitesse de la plaque 2 au point M_2 , en fonction de la fréquence, mesure directe (—), résolution complète (- - -), résolution simplifiée, critère $|\lambda/(1-\lambda^2)|$ (.....)

5.5. CONCLUSION

Les développements théoriques de la méthode des valeurs propres de couplage ont été mis en œuvre expérimentalement dans ce chapitre.

Le dispositif expérimental se compose de deux plaques d'acier libres suspendues, couplées par une ou par trois barrettes de Plexiglas qui font fonction de ressorts. Avec différentes positions du pot vibrant d'excitation, on effectue des mesures de mobilités quand les plaques sont découplées bloquées de manière à reconstituer la vitesse des plaques en un point. Cette démarche est menée dans le cas d'une seule liaison, puis dans le cas de trois liaisons.

La principale différence qui existe entre la méthode des mobilités et la méthode des valeurs propres et des vecteurs propres de couplage vient de ce que dans cette dernière, les éléments vibrants sont en configuration découplée bloquée. D'un point de vue pratique, cela signifie que l'on doit bloquer le ressort attaché à la plaque au moyen d'une masse. Dans la configuration choisie, il s'est avéré que le blocage nécessitait une masse extrêmement importante aux basses fréquences (450 kg à 100 Hz). La masse de 30 kg finalement utilisée n'est efficace qu'à partir de 400 Hz.

Dans le cas d'un seul couplage entre les plaques, la recomposition de la valeur propre de couplage montre que la configuration expérimentale correspond à un couplage fort (en tout cas beaucoup plus fort qu'attendu), soit structurellement, soit parce que certaines grandeurs sont mal estimées.

La recomposition de la vitesse aux points courants M_1 et M_2 des plaques 1 et 2 comparée à la mesure directe aux mêmes points a donné d'excellents résultats, tant en bandes fines qu'en tiers d'octave (2 dB de différence maximum), pourvu que l'on se place au dessus des 400 Hz susmentionnés. Les phases obtenues par les deux méthodes de mesure se suivent aussi parfaitement.

Dans le cas du couplage par trois ressorts, on travaille selon deux axes. Le premier consiste à reconstruire complètement la vitesse des plaques aux points courants M_1 et M_2 . Le nombre de mesures à faire augmente puisqu'il faut en plus mesurer les mobilités croisées entre les points de couplage. Ces mesures permettent de déterminer les coefficients de correspondance entre les vecteurs propres de couplage isolés. Les calculs nécessaires pour obtenir la vitesse des plaques couplées sont rapides ; ils suivent la démarche indiquée au § 4.3.

Les résultats obtenus sont là encore excellents compte tenu du nombre relativement élevé de mesures à faire. Ce que laissait présager les expériences faites avec un seul ressort ce confirme ici, à savoir que la méthode présente de grandes qualités de robustesse. On n'observe

pas l'émergence de fréquences singulières, comme cela arrive par la méthode classique des mobilités. La différence essentielle, du point de vue de la méthode de mesure, est l'utilisation de la condition découplée bloquée. Celle-ci est somme toute facile à mettre en œuvre, si ce n'est la dimension de la masse bloquante. Il semble donc que le fait de bloquer les éléments vibrants entraîne une grande fiabilité dans la recombinaison des vitesses après couplage.

L'autre axe qui a été exploré consiste à vérifier la bonne marche de la méthode simplifiée basée sur le chemin modal dominant. Cette méthode nécessite de calculer les valeurs propres de couplage globales afin de déterminer laquelle est dominante. Les calculs à effectuer sont un peu plus complexes du fait des recombinaisons diverses, mais il n'y a aucune mesure supplémentaire à faire par rapport au cas précédent.

Les résultats expérimentaux qui comparent la mesure directe de la vitesse avec la recombinaison simplifiée donnent encore une fois des résultats dans une très bonne précision bien que les trois ressorts soient de même raideur. Certes, la vitesse de la plaque 2 réceptrice (non excitée) obtenue par la résolution simplifiée sous-estime la vitesse directement mesurée (ou même reconstituée complètement) mais dans une marge d'erreur tout-à-fait acceptable, et qui correspond bien à l'erreur commise lors des calculs numériques du § 4.2..

Ce cas a encore permis de démontrer la robustesse de la méthode, à la fois sur le strict plan de la mesure, mais aussi sur le plan des quantités manipulées. Les valeurs propres de couplage globales, et la technique de résolution qui leur est associée, représentent très bien la physique mise en jeu lors du couplage. C'est pourquoi même la résolution simplifiée donne d'excellents résultats.

* * *
*

CONCLUSION

Conclusion

Ce travail de thèse avait pour but de caractériser les mécanismes mis en jeu lors du couplage d'éléments vibrants afin de réduire le volume des calculs et des paramètres à manipuler ou à limiter le nombre de mesures à faire pour décrire correctement le phénomène dans des conditions expérimentales. Pour ce faire, une nouvelle méthodologie a été développée et appliquée à deux principaux modèles.

Le premier consiste en deux oscillateurs à un degré de liberté couplés. Son extrême simplicité a permis une compréhension aisée des principes fondamentaux de la méthode ainsi qu'une bonne perception des nouvelles quantités utilisées pour décrire le couplage : les valeurs propres de couplage et les vecteurs propres de couplage.

Si un modèle simpliste est adapté à la compréhension des phénomènes de base, il est indispensable de traiter un modèle un peu plus complexe (et plus réaliste) pour bien appréhender la méthodologie dans son ensemble. C'est pourquoi le modèle multimodal des deux plaques couplées par un puis plusieurs ressorts a été choisi.

Tous ces modèles ont permis de dégager les propriétés des quantités propres de couplage. Tout d'abord, ils ont montré que le nombre de valeurs propres de couplage est égal au nombre de liaisons entre les systèmes vibrants. Un ressort, une valeur propre de couplage, N_k ressorts, N_k valeurs propres de couplage. La valeur propre de couplage est une quantité globale, adimensionnelle et indépendante des conditions d'excitation des systèmes. Elle décrit les échanges qui vont d'un système à un autre ; elle est égale à la moyenne géométrique des rapports des mobilités des systèmes découplés bloqués sur celle du ressort.

Un résultat tout-à-fait fondamental est que la valeur propre de couplage est représentative de la force du couplage et que lorsque le couplage est maximum, elle vaut un. Cela ne signifie pas que la valeur unité constitue un seuil au-delà duquel le couplage est fort et en deçà, le couplage est faible. Cependant, le couplage peut être défini comme fort lorsque la valeur propre de couplage oscille autour de 0 dB (dans une représentation logarithmique) et faible lorsque la valeur propre de couplage n'atteint pas 0 dB.

La valeur propre de couplage est particulièrement efficace pour décrire le couplage entre des éléments. Contrainte par aucune hypothèse, soumise à aucun moyennage fréquentiel ou spatial, elle est complètement déterministe. Enfin, une de ses dernières qualités est qu'elle est très facilement accessible à la mesure.

Les vecteurs propres de couplage représentent le chemin de transmission modal du couplage. Ils permettent de déterminer quels sont les modes des résonances des systèmes

découplés bloqués qui sont mis en jeu lors du couplage. Ils servent en outre de base de résolution pour exprimer les vecteurs vitesse des systèmes couplés et découplés bloqués.

Lorsque les plaques sont couplées avec plusieurs ressorts, on peut trier les valeurs propres de couplage (dites globales) afin d'effectuer un diagnostic. On constate que sur l'ensemble de la plage fréquentielle, de par son comportement modal, il existe toujours une valeur propre de couplage qui domine les autres. Aussi, on peut mettre en œuvre une résolution simplifiée. Basée sur ce chemin modal, elle ne prend en compte qu'un seul chemin de transmission du couplage, le chemin modal dominant.

L'application numérique de cette méthode dans le cas défavorable où toutes les liaisons sont de raideur identique donne (par rapport à une solution de référence) un résultat où tous les pics de résonance des systèmes couplés sont parfaitement décrits. En revanche, les creux souffrent d'une sous-estimation : à ce moment, les deux plus grandes valeurs propres de couplage se croisent et l'hypothèse d'une seule valeur propre de couplage dominante n'est alors plus vérifiée). En tiers d'octaves, la résolution simplifiée est excellente aux basses fréquences alors qu'une sous-estimation limitée à 3 dB au maximum intervient aux plus hautes fréquences.

Si cette méthode simplifiée est très puissante, elle souffre de ne pas pouvoir établir de correspondance directe entre les chemins de transmissions modaux et les liaisons physiques. C'est pourquoi l'on propose une résolution basée sur le chemin physique dominant. Celle-ci s'appuie sur la connaissance des valeurs propres de couplage isolées (c'est-à-dire calculées dans le cas où l'on ne considère qu'une liaison à la fois, les autres restant bloquées). À chaque valeur propre de couplage isolée correspond une liaison physique. Dans ce cas, l'existence d'un chemin physique dominant est subordonnée à l'existence de caractéristiques de liaisons bien différenciées. L'application de la résolution simplifiée dans ce cas conduit à des résultats de précision très satisfaisante.

Les calculs numériques issus de ces deux méthodes simplifiées ont montré que le chemin modal dominant est très robuste même dans des conditions défavorables et permet de donner une solution à moins de 3 dB d'erreur, confirmant ainsi le côté physique des quantités propres de couplage. Quant à la méthode basée sur le chemin physique dominant, elle procure un critère de diagnostic *in situ* très efficace puisqu'il suffit de comparer les valeurs propres de couplage isolées entre elles pour détecter si l'une est dominante et finalement appliquer la résolution simplifiée. Dans ce cas, le nombre de données à manipuler est réduit au strict minimum et la méthode est très rapide. Cette capacité de diagnostic est particulièrement intéressante dans un cadre expérimental où la valeur propre de couplage isolée se mesure quasiment directement. C'est pourquoi la méthodologie a été testée expérimentalement.

Le modèle expérimental consiste en deux plaques suspendues couplées par un ou trois ressorts identiques. La mesure de différentes mobilités permet d'accéder aux valeurs propres

de couplage isolées et ensuite de recomposer les valeurs propres de couplage globales (selon la méthode de résolution choisie). Ces mesures diffèrent de la classique approche par mobilités par le fait que les systèmes ne sont pas libres mais découplés bloqués (une condition de vitesse nulle est appliquée à l'extrémité des liaisons). Cette condition est relativement aisée à mettre en œuvre, à condition de bien dimensionner les éléments de blocage.

Dans cette configuration, la recombinaison simplifiée de la vitesse en un point de chaque plaque (comparée à celle directement mesurée au même point) est effectuée sur la base du chemin modal dominant uniquement puisque les trois liaisons sont identiques. Les résultats sont excellents, compte tenu du nombre de mesures réalisées, de la relative complexité du calcul de traitement et du fait que l'on se place en un point courant. Comme dans le cas des applications numériques, on note une légère sous-estimation aux plus hautes fréquences.

La caractéristique la plus flagrante de ces mesures est leur robustesse. A aucun moment on ne décèle de fréquences singulières qui nuisent tellement à l'efficacité de l'approche classique par mobilités. Cette stabilité des mesures semble venir de la condition découplée bloquée qui différencie fondamentalement les deux techniques. L'aspect physique des valeurs propres de couplage aidant, on dispose d'une méthode de résolution efficace et rapide, qui peut aider à formuler un diagnostic *in situ*, grâce au tri des valeurs propres de couplage isolées qui indiquent la capacité de tel ou tel chemin physique de transmettre les vibrations d'un système à l'autre.

Il est évident que la méthodologie exposée dans ce rapport possède un fort potentiel, de par l'aspect physique de la valeur propre de couplage et sa capacité à décrire le couplage de manière intrinsèque, indépendamment du type d'excitation, sans hypothèses réductrices et donc avec une grande facilité d'accessibilité à la mesure. Mais les modèles choisis se sont contentés de couplage mécanique ponctuel ne communiquant que des efforts. L'extension vers des problèmes vibroacoustique plus complexes (et plus réalistes) comme des couplages étendus de nature surfacique reste à faire. Il semble que la théorie décrite peut s'adapter relativement facilement à des liaisons surfaciques en discrétisant la liaison. Le couplage de doubles parois par une lame d'air pourrait s'obtenir en considérant chaque mode du volume comme une liaison ponctuelle.

Le développement de la méthode vers le couplage fluide-structure est à envisager. Les notions de systèmes vibrants et de liaisons seraient à reconsidérer, pour pouvoir redéfinir des valeurs propres de couplage et ainsi profiter des avantages qu'elles fournissent.

La partie expérimentale a déjà montré un aspect robuste et efficace qui pourrait s'appliquer quasiment directement à des conditions de terrain. Les machines montées sur des supports plus ou moins rigides par l'intermédiaire d'interfaces plus ou moins raides représentent l'application directe du système vibrant (la plaque excitée) connecté à récepteur (la plaque réceptrice) par l'intermédiaire d'une liaison élastique.

* * *

*

**REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES**

&

BIBLIOGRAPHIE

Avertissement

Les références des auteurs **cités dans le texte** sont reproduites dans la liste intitulée “Références bibliographiques”.

La liste “Bibliographie” donne les références d'articles ou d'ouvrages qui n'ont pas été directement cités dans le texte mais qui présentent un intérêt évident dans le cadre des domaines abordés par ce travail de thèse.

Nota Bene : Toutes les références bibliographiques sont données par ordre alphabétique du premier auteur.

Références bibliographiques

- [1] **ATALLA, N. et BERNHARD, R. J.** - Review of numerical solutions for low-frequency structural-acoustic problems. *Applied Acoustics*, **1994**, Vol. 43, p. 271-294.
- [2] **BATOZ, J.-L. et DHATT, G.** - *Modélisation des structures par éléments finis*. Paris : Hermès, **1990**, 3 volumes, 455 p., 483 p. et 564 p.
- [3] **BESSAC, F., GAGLIARDINI, L. et GUYADER, J.-L.** - Méthode de prévision des équilibres vibratoires dans les systèmes couplés par utilisation des valeurs propres et des vecteurs propres de couplage. *In Actes du 3ème Congrès français d'acoustique, Toulouse, mai 1994*, Journal de Physique IV, **1994**, Vol. 4, p.761-764.
- [4] **BESSAC, F., GAGLIARDINI, L. et GUYADER, J.-L.** - A method for predicting the vibratory balances in coupled systems using eigenvalues and eigenvectors. *In Proceedings of the 15th International Congress on Acoustics (ICA'95), Trondheim (Norvège), 1995 June 26-30*, Ed. Mike Newman. Acoustical Society of Norway. **1995**, Vol. 1, p. 471-474.
- [5] **BESSAC, F., GAGLIARDINI, L. et GUYADER, J.-L.** - Coupling eigenvalues and eigenvectors: a tool for investigating the vibroacoustic behaviour of coupled vibrating systems. *Journal of Sound and Vibration*, **1996**, Vol. 191, N° 5, p. 881-899.
- [6] **BELINSKI, B. P. et KOUZOV, D. P.** - Green's-type formulas for flexurally vibrating plates. *Sov. Phys. Acoust. (translated by J. S. WOOD)*, **1981**, Vol. 25, N° 5, p. 394-398.
- [7] **BIES, D. A. et HAMID, S.** - In situ determination of loss and coupling loss factors by the power injection method. *Journal of Sound and Vibration*, **1980**, Vol. 70, N° 2, p. 187-204.
- [8] **BOKIL, V. B. et SHIRAHATTI, U. S.** - A technique for the modal analysis of sound-structure interaction problems. *Journal of Sound and Vibration*, **1994**, Vol. 173, N° 1, p. 23-41.
- [9] **CACCIOLATI, C. et GUYADER, J.-L.** - Measurement of S.E.A. coupling loss factors using point mobilities. *The Royal Society Philisophical Transactions : Physical Sciences and Engineering. Statistical Energy Analysis, a theme compiled and edited by Price, W. G. and Keane; A. J.* **1994**, Vol. 346, N° 1681, p. 465-475.
- [10] **CLARKSON, B. L. et RANKY, M. F.** - On the measurement of the coupling loss factor of structural connections. *Journal of Sound and Vibration*, **1984**, Vol. 94, N° 2, p. 249-261.
- [11] **CRAIK, R. J. M., STEEL, J. A. et EVANS, D. I.** - Statistical energy analysis of structure-borne sound transmission at low frequencies, *Journal of Sound and Vibration*, **1991**, Vol. 144, N° 1, p. 95-107.

- [12] **CRANDALL, S. H. et LOTZ, R.** - On the coupling loss factor in statistical energy analysis. *Journal of the Acoustical Society of America*, **1971**, Vol. 49, N° 1, p. 352-356.
- [13] **CREMER, L., HECKL, M. et UNGAR, E. E.** - *Structure-Borne Sound : Structural Vibrations and Sound Radiation at Audio Frequencies*. Berlin : Springer-Verlag, **1966** (revised 1972), 573 p.
- [14] **CUSHIERI, J. M.** - Structural power flow analysis using a mobility approach of an L-shaped plate. *Journal of the Acoustical Society of America*, **1990**, Vol. 87, N° 3, p. 1159-1165.
- [15] **DJIMADOUM, M.** - *Prévision des vibrations stationnaires et instationnaires aux moyennes fréquences : approche en énergie moyenne et approche par admittances impulsionnelles*. Thèse scientifique de doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, France, **1993**, 196 p.
- [16] **DOHERTY, S. M. et DOWELL, E. H.** - Experimental study of asymptotic modal analysis applied to a rectangular plate with concentrated masses. *Journal of Sound and Vibration*, **1994**, Vol. 170, N° 5, p. 671-681.
- [17] **DOWELL, E. H. et KUBOTA, Y.** - Asymptotic modal analysis and Statistical Energy Analysis of dynamical systems. *Journal of Applied Mechanics*, **1985**, Vol. 52, p. 949-957.
- [18] **FAHY, F.** - L'analyse statistique énergétique : une revue critique. *Revue d'Acoustique*, **1975**, N° 33, p. 10-25.
- [19] **FAHY, F.** - *Noise and Vibration*. éd. R.G. White and J. G. Walker. Chichester : Ellis Horwood. **1982**, Chapter 7, *Statistical Energy Analysis*, p. 165-186.
- [20] **FAHY, F.** - *Sound and Structural Vibration: radiation, transmission and response*: London : Academic Press, **1985**, 309 p.
- [21] **GAGLIARDINI, L.** - *Simulation numérique de la transmission acoustique par les parois simples et multiples*. Thèse scientifique de doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, France, **1991**, 352 p.
- [22] **GAGLIARDINI, L., ROLAND, J. et GUYADER, J.-L.** - The use of functional basis to calculate acoustic transmission between rooms. *Journal of Sound and Vibration*, **1991**, Vol. 145, N° 3, p. 457-478.
- [23] **GAGLIARDINI, L., BESSAC, F. et GUYADER, J.-L.** - Power flow between two coupled multimodal systems using the coupling eigenvalues method. *In Proceedings of International Congress on Noise Control Engineering (Inter-Noise 95), Newport Beach, (USA), 1995 July 10-12*, **1995**, Vol. 1, p. 621-624.
- [24] **GERRETSEN, E.** - European developments in prediction models for building acoustics. *Acta Acustica*, **1994**, Vol. 2, N° 3, p. 205-214.

- [25] **GUY, R. W. et BHATTACHARRYA, M. C** - The transmission of sound through a cavity-backed finite plate. *Journal of Sound and Vibration*, **1973**, Vol. 27, N° 2, p. 207-223.
- [26] **GUYADER, J.-L., BOISSON, C. et LESUEUR, C.** - Energy transmission in finite coupled plates. Part 1 : theory. *Journal of Sound and Vibration*, **1982**, Vol. 81, N° 1, p. 81-92.
- [27] **GUYADER, J.-L.** - Modal sampling method for the vibration study of systems of high modal density. *Journal of the Acoustical Society of America*, **1990**, Vol. 88, N° 5, p. 2269-2276.
- [28] **HODGES, C. H. et WOODHOUSE, J.** - Theories of noise and vibration transmission in complex structures. *Reports in Progress in Physics*, **1989**, Vol. 49, p. 107-170.
- [29] **JACOB, F.** Sensibilité de la méthode S.E.A. Villeurbanne (France) : INSA. Laboratoire Vibrations-Acoustique, **1995**, 230 p. - rapport.
- [30] **LANGLEY, R. S.** - A derivation of the coupling loss factors used in statistical energy analysis. *Journal of Sound and Vibration*, **1990**, Vol. 141, N° 2, p. 207-219.
- [31] **LE BOT, A.** - Energy methods applied to transverse vibrations of beams. *In Proceedings of the 4th International Congress on Intensity Techniques, Senlis (France), August 31 -September 2, 1993*. Ed. G. Pavic (CETIM). **1993**, p. 371-378.
- [32] **LEON, L.** - *Traitement d'algorithmes par ordinateur*. Toulouse : Cepadues-Editions, E.N.S.T.A., **1983**, Tome 1, 520 p.
- [33] **LEVY, S. et WILKINSON, J. P. D.** - *The Component Element Method in Dynamics*. New York : McGraw-Hill, **1976**, 363 p.
- [34] **LIAO, J.-L. et TSE, C.-C.** - An algebraic approach for the modal analysis of synthesised structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **1993**, Vol. 7, N° 1, p. 89-104.
- [35] **LYON, R. H. et MAIDANIK, G.** - Power flow between linearly coupled oscillators. *Journal of the Acoustical Society of America*, **1962**, Vol. 34, N° 5, p. 623-639.
- [36] **LYON, R. H.** - Noise Reduction of rectangular enclosures with one flexible wall. *Journal of the Acoustical Society of America*, **1963**, Vol. 35, N° 11, p. 1791-1797.
- [37] **MACE, B. R.** - On the statistical energy analysis hypothesis of coupling power proportionality and some implications of its failure. *Journal of Sound and Vibration*, **1994**, Vol. 178, N° 1, p. 95-112.
- [38] **MAGRANS, F. X.** - Definition and calculation of transmission paths within a S.E.A. framework. *Journal of Sound and Vibration*, **1993**, Vol. 165, N° 2, p. 277-283.
- [39] **MAIDANIK, G.** - Response of coupled dynamic systems. *Journal of Sound and Vibration*, **1976**, Vol. 46, N° 4, p. 561-583.

- [40] **MATHEY, R.** - *Physique des vibrations mécaniques*. Paris : Dunod, **1963**. Ondes de volume dans les corps solides, p. 201-218.
- [41] **MILLOT, P.** - *Rayonnement acoustique des plaques couplées dans une cavité*. Thèse scientifique de doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, **1987**, 169 p.
- [42] **MONDOT, J. M. et PETERSSON, B.** - Characterization of structure-borne sound sources: the source descriptor and the coupling function. *Journal of Sound and Vibration*, **1987**, Vol. 114, N° 3, p. 507-518.
- [43] **MOORHOUSE, A. T. et GIBBS, G. M.** - Prediction of the structure-borne noise emission of machines: development of a methodology. *Journal of Sound and Vibration*, **1993**, Vol. 167, N° 2, p. 223-237.
- [44] **MORAND, H. J.-P.** - A modal hybridisation method for the reduction of dynamic models in the medium frequency range. In : *Proceedings of the European Conference on New Advances in Computational Structural Mechanics, Gien, Avril 1991*. éd. par O.C. Zienkiewicz P. Ladeveze. - Amsterdam : Elsevier Science Publishers, **1991**, 8 p.
- [45] **MORAND, H. J.-P.** - Méthode d'hybridation modale. In : *Colloque international Ambiance acoustique et vibratoire des systèmes de transport spatial*. éd. par ONERA CNES. - Châtillon, France : Onera, Information scientifique et technique et publication, **1994**, p. 99-109.
- [46] **NAJI, S.** - *Etude des transmissions vibratoires par une méthode de mobilité mixte dans les assemblages par surface*. Thèse scientifique de doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, France, **1993**, 98 p.
- [47] **NEFSKE, D. J., WOLF, J. A. et HOWELL, L. J.** - Structural-acoustic finite element analysis of the automobile passenger compartment: a review of current practice. *Journal of Sound and Vibration*, **1982**, Vol. 80, N° 2, p. 247-266.
- [48] **NEFSKE, D. J. et SUNG, S. H.** - Power flow finite element analysis of dynamic systems: basic theory and application to beams. *In ASME Publication NCA-3: Statistical Energy Analysis*, **1987**, p. 47-54.
- [49] **PAN, J. et BIES, D. A.** - The effect of fluid-structural coupling on sound waves in an enclosure - Theoretical part. *Journal of the Acoustical Society of America*, **1990**, Vol. 87, N° 2, p. 691-707.
- [50] **PINNINGTON, R. J. et WHITE, R. G.** - Power flow through machine isolators to resonant and non resonant beams. *Journal of Sound and Vibration*, **1981**, Vol. 75, N° 2, p. 179-197.
- [51] **PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T. Et FLANNERY, B. P.** - *Numerical recipes in C*. New edition: Cambridge University press, **1992**, 994 p.
- [52] **PRETLOVE A. J.** - Forced vibrations of a rectangular panel backed by a closed rectangular cavity. *Journal of Sound and Vibration*, **1966**, Vol. 3, p. 252-261.

- [53] **REBILLARD, E.** - *Vibro-acoustique des réseaux de plaques : modélisation, hypersensibilité et populations de structures*. Thèse scientifique de doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, France, **1995**, 184 p.
- [54] **REMINGTON, P. J. et MANNING, J. E.** - Comparison of Statistical Energy Analysis power flow predictions with an "exact" calculation. *Journal of the Acoustical Society of America*, **1975**, Vol. 57, N° 2, p. 374-379.
- [55] **ROSEAU, M.** - *Vibrations des systèmes mécaniques : méthodes analytiques et applications*. Paris : Masson, **1984**, 488 p.
- [56] **SHARTON, T. D. et LYON, R. H.** - Power Flow and Energy Sharing in Random Vibration. *Journal of the Acoustical Society of America*, **1968**, Vol. 43, N° 6, p. 1332-1343.
- [57] **SOIZE, C.** - A model and numerical method in the medium frequency range for vibroacoustic predictions using the theory of structural fuzzy. *Journal of the Acoustical Society of America*, **1993**, Vol. 94, N° 2, p. 849-865.
- [58] **TRENTIN, D. et GUYADER, J.-L.** - Calcul de la méthode d'échantillonnage modal des énergies vibratoires de plaques couplées. *Colloque international Ambiances acoustiques et vibrations des systèmes de transport spatial*, Chatillon (France) : Onera-Cnes, ref. 45, **1994**, p. 110-117.
- [59] **TRENTIN, D. et GUYADER, J.-L.** - Vibration of a master plate with attached masses using modal sampling method. *Journal of the Acoustical Society of America*, **1994**, Vol. 96, N° 1, p. 235-245.
- [60] **WARBURTON, G. B.** - *The Dynamical Behaviour of Structures (2nd edition)*. Oxford : Pergamon Press, **1976**, 354 p.
- [61] **WOODHOUSE, J.** - An approach to the theoretical background of statistical energy analysis applied to structural vibration. *Journal of the Acoustical Society of America*, **1981**, Vol. 69, N° 6, p. 1695-1709.
- [62] **ZHANG, Q.** - Application de l'analyse modale à la résolution des problèmes acoustiques automobiles en basse fréquence. Rueil-Malmaison (France) : Régie Renault, **1992**, 8 p - rapport.

Bibliographie

- (1) **BRUNEAU, M.** - *Introduction aux théories de l'acoustique*. Le Mans, France : Université du Maine. **1983**, 634 p.
- (2) **DAVIS, H. G.** - Exact solutions for the response of some coupled multimodal systems. *Journal of the Acoustical Society of America*, **1971**, Vol. 51, N° 1, p. 387-392.
- (3) **DAVIS, H. G.** - Random vibration of distributed systems strongly coupled at discrete points. *Journal of the Acoustical Society of America*, **1973**, Vol. 54, N° 2, p. 508-515.
- (4) **DJIMADOUM, M et GUYADER, J.-L.** - Prediction of coupled beam energy with the equation of diffusion - Boundary, excitation and coupling conditions. *In Proceedings of the 4th International Congress on Intensity Techniques, Senlis (France), August 31 -September 2, 1993*. Ed. G. Pavic (CETIM). **1993**, p. 379-390.
- (5) **FAHY, F. et JAMES, P. P.** - Impulse energy response as an indicator of S.E.A. coupling strength. *In Proceedings of the 15th International Congress on Acoustics (ICA'95), Trondheim (Norvège), 1995 June 26-30*. Ed. Mike Newman. Acoustical Society of Norway. **1995**, Vol. 1, p. 29-32.
- (6) **GIBBS, B. M. et GILFORD, L. S.** - The use of power flow methods for the assessment of sound transmission in building structures. *Journal of Sound and Vibration*, **1976**, Vol. 49, N° 2, p. 267-286.
- (7) **GIBBS, B. M., PETERSSON, B. A. T. et QIU, S.** - The characterization of structure-borne emission of building services machinery using the source descriptor concept. *Noise Control Engineering Journal*, **1991**, Vol. 37, N° 2, p. 53-61.
- (8) **GOYDER, H. G. D.** - Methods and application of structural modelling from measured structural frequency response data. *Journal of Sound and Vibration*, **1980**, Vol. 68, N° 2, p. 209-230.
- (9) **KEANE, A. J. et PRICE, W. G.** - Statistical energy analysis of strongly coupled systems. *Journal of Sound and Vibration*, **1987**, Vol. 117, N° 2, p. 363-386.
- (10) **LANGLEY, R. S.** - A general derivation of the statistical energy analysis equations for coupled dynamic systems. *Journal of Sound and Vibration*, **1989**, Vol. 135, N° 3, p. 499-508.
- (11) **LANGLEY, R. S.** - Analysis of beam and plate vibrations by using the wave equation. *Journal of Sound and Vibration*, **1991**, Vol. 150, N° 1, p. 47-65.
- (12) **LYON, R. H. et SHARTON, T. D.** - Vibrational-Energy Transmission in a Three-Element Structure, *Journal of the Acoustical Society of America*, **1965**, Vol. 38, N° 2, p. 253-261.

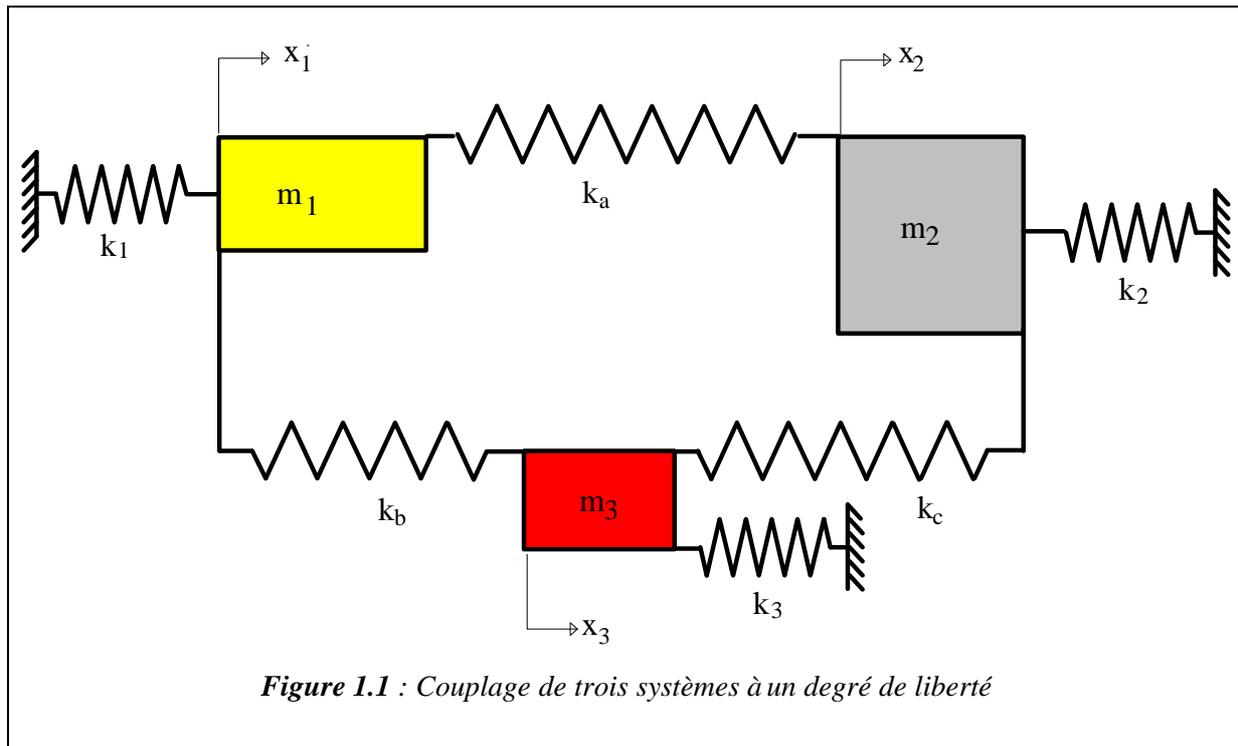
- (13) **LYON, R. H.** - *Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems: Theory and Applications*. Cambridge, Massachusetts : MIT Press, **1975**, 388 p.
- (14) **MA, Z. D. et HAGIWARA, I.** - Sensivity Analysis Method for coupled acoustic-structural systems. Part 1: Modal sensitivities. *AIAA Journal*, **1991**, Vol. 29, N° 11, p. 1787-1795.
- (15) **MAIDANIK, G.** - Variations in the boundary conditions of coupled dynamic systems. *Journal of Sound and Vibration*, **1976**, Vol. 46, N° 4, p. 585-589.
- (16) **MAZET, R.** - *Mécanique vibratoire*. Paris : Dunod, **1966**, 368 p.
- (17) **MOORHOUSE, A. T. et GIBBS, B. M.** - Prediction of the structure-borne noise emission of machines: development of a methodology. *Journal of Sound and Vibration*, **1993**, Vol. 167, N° 2, p. 223-237.
- (18) **NEWLAND, D. E.** - Calculation of power flow between coupled oscillators. *Journal of Sound and Vibration*, **1966**, Vol. 3, N° 3, p. 262-276.
- (19) **PETERSSON, B. A. T. et GIBBS, B. M.** - Use of the source descriptor concept in studies of multi-point and multi-directional vibrational sources. *Journal of Sound and Vibration*, **1993**, Vol. 168, N° 1, p. 157-176.
- (20) **PICHON, J.** - *Algèbre linéaire*. Paris : Ellipses, **1993**, 207 p.
- (21) **TIMOSHENKO, S.** *Theory of plates and shells*. New York : McGraw-Hill Book Company, **1940**, 492 p.
- (22) **WOODHOUSE, J.** - An introduction to statistical energy analysis of structural vibration. *Applied Acoustics*, **1981**, Vol. 14, p. 455-469.

ANNEXE 1

Couplage de 3 systèmes à 1 degré de liberté

Annexe 1 : Couplage de 3 systèmes à 1 degré de liberté

La Figure 1.1 modélise le couplage “circulaire” des trois systèmes à un degré de liberté. Les systèmes i sont composés d'une masse m_i et d'un ressort k_i (de raideur complexe).



Les déplacements sont notés x_i et les composantes selon x des forces appliquées aux masses sont désignés par F_{oi} .

La relation fondamentale de la dynamique permet d'exprimer l'équilibre dynamique des masses en fonction des forces qui leur sont appliquées :

$$\begin{aligned} \mathbf{\ddot{x}}_1 m_1 &= k_a (x_2 - x_1) + k_b (x_3 - x_1) - k_1 x_1 + F_{o1} \\ \mathbf{\ddot{x}}_2 m_2 &= k_a (x_1 - x_2) + k_c (x_3 - x_2) - k_2 x_2 + F_{o2} \\ \mathbf{\ddot{x}}_3 m_3 &= k_b (x_1 - x_3) + k_c (x_2 - x_3) - k_3 x_3 + F_{o3} \end{aligned}$$

Eq. A1-1

Ce système de trois équations s'exprime sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (k_1 + k_a + k_b) \\ -k_a \\ j\omega \\ -k_b \\ j\omega \end{bmatrix} + j\omega m_1 \begin{bmatrix} -k_a \\ (k_2 + k_a + k_c) \\ -k_c \\ (k_3 + k_b + k_c) \end{bmatrix} + j\omega m_2 \begin{bmatrix} -k_b \\ -k_c \\ j\omega \\ j\omega \end{bmatrix} + j\omega m_3 \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{u} \\ \hat{u} \\ \hat{u} \\ \hat{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_3 \\ w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{u} \\ \ddot{u} \\ \ddot{u} \\ \ddot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{01} \\ \hat{F}_{02} \\ \hat{F}_{03} \\ \hat{F}_{03} \\ \hat{F}_{03} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{y} \\ \ddot{y} \\ \ddot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}$$

Eq. A1-2

Une matrice d'impédance relie la vitesse de chaque système aux forces qui leur sont appliquées. On pose Y_i , la quantité qui est de la dimension d'une mobilité :

$$\begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{y} \\ \hat{y} \\ \hat{y} \\ \hat{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_3 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 + k_a + k_b \\ k_2 + k_a + k_c \\ k_3 + k_b + k_c \\ k_3 + k_b + k_c \\ k_3 + k_b + k_c \end{bmatrix} + j\omega m_1 \begin{bmatrix} j\omega \\ j\omega \\ j\omega \\ j\omega \\ j\omega \end{bmatrix}$$

Eq. A1-3

L'Eq. A1-2 est transformée en :

$$\begin{bmatrix} \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1^{-1} \\ -k_a \\ j\omega \\ -k_b \\ j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k_a \\ -k_b \\ -k_c \\ -k_c \\ -k_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{u} \\ \hat{u} \\ \hat{u} \\ \hat{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_3 \\ w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{u} \\ \ddot{u} \\ \ddot{u} \\ \ddot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{01} \\ \hat{F}_{02} \\ \hat{F}_{03} \\ \hat{F}_{03} \\ \hat{F}_{03} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{y} \\ \ddot{y} \\ \ddot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}$$

Eq. A1-4

L'Eq. A1-4 est reformulée uniquement en dimension de vitesse, en divisant chaque ligne par le terme diagonal de sa matrice d'impédance, Y_i^{-1} , de manière à obtenir une matrice adimensionnelle :

$$\begin{bmatrix} \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -Y_2 \frac{k_a}{j\omega} \\ -Y_3 \frac{k_b}{j\omega} \\ -Y_3 \frac{k_a}{j\omega} \\ -Y_3 \frac{k_c}{j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Y_1 \frac{k_a}{j\omega} \\ 1 \\ -Y_2 \frac{k_c}{j\omega} \\ -Y_3 \frac{k_c}{j\omega} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{u} \\ \hat{u} \\ \hat{u} \\ \hat{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_3 \\ w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{u} \\ \ddot{u} \\ \ddot{u} \\ \ddot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_1 F_{01} \\ \hat{Y}_2 F_{02} \\ \hat{Y}_3 F_{03} \\ \hat{Y}_3 F_{03} \\ \hat{Y}_3 F_{03} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{y} \\ \ddot{y} \\ \ddot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}$$

Eq. A1-5

En formalisant sous une dimension de vitesse, une autre matrice apparaît, la matrice de couplage :

$$\overline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}} & 0 & C_{12} & C_{13} \\ \hat{\mathbf{e}} & C_{21} & 0 & C_{23} \\ \hat{\mathbf{e}} & C_{31} & C_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -Y_1 \frac{k_a}{j\omega} & -Y_1 \frac{k_b}{j\omega} \\ Y_2 \frac{k_a}{j\omega} & 0 & -Y_2 \frac{k_c}{j\omega} \\ Y_3 \frac{k_b}{j\omega} & -Y_3 \frac{k_c}{j\omega} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix}$$

Eq. A1-6

Elle est adimensionnelle et sa diagonale est nulle, donc ses valeurs propres sont adimensionnelles et leur somme est nulle. La matrice de couplage n'exprime que les interactions entre les systèmes. L'Eq. A1-5 se reformule en :

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_1 \\ \dot{\mathbf{u}}_2 \\ \dot{\mathbf{u}}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}} & 0 & C_{12} & C_{13} \\ \hat{\mathbf{e}} & C_{21} & 0 & C_{23} \\ \hat{\mathbf{e}} & C_{31} & C_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_1 \\ \dot{\mathbf{u}}_2 \\ \dot{\mathbf{u}}_3 \\ \dot{\mathbf{u}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{o1} \\ \dot{\mathbf{u}}_{o2} \\ \dot{\mathbf{u}}_{o3} \end{bmatrix}$$

Eq. A1-7

Dans le cas où le vecteur propre n'est pas identiquement nul, le calcul de la valeur propre est obtenu en identifiant le déterminant de la matrice de l'Eq. A1-6 à zéro :

$$\det[\overline{\mathbf{C}} - \lambda \overline{\mathbf{I}}] = 0$$

Eq. A1-8

L'équation aux valeurs propres fait apparaître une équation du troisième degré :

$$\lambda^3 + \lambda \frac{k_a k_b k_c}{j\omega^3} + Y_1 Y_2 Y_3 \frac{k_c^2}{\omega^2} + Y_1 Y_2 \frac{k_a^2}{\omega^2} + Y_1 Y_3 \frac{k_b^2}{\omega^2} - 2Y_1 Y_2 Y_3 \frac{k_a k_b k_c}{j\omega^3} = 0$$

Eq. A1-9

L'Eq. A1-9 montre bien que les valeurs propres de couplage sont interdépendantes.

La Figure 1.2 présente les 3 valeurs propres de couplage en fonction de la fréquence pour la configuration donnée dans les deux tableaux suivants :

	Ressort a	Ressort b	Ressort c
Raideur (N.m ⁻¹)	4000	2000	6000

Tableau A1.1 : Caractéristiques des 3 ressorts de couplage

	Système 1	Système 2	Système 3
Masse (kg)	2	5	8
Raideur (N.m ⁻¹)	60000	40000	20000
Amortissement	1%	1%	1%

Tableau A1.2 : Caractéristiques des 3 systèmes à 1 degré de liberté

On observe trois courbes différentes. il n'y a pas de paires de valeurs propres de couplage. Donc, le couplage de trois systèmes à un degré de liberté, dans une configuration asymétrique donne bien trois valeurs propres de couplage différentes.

D'autre part, on remarque que les courbes présentent trois pics. Pour chaque pic, deux courbes sont présentes à chaque fois. Il faut de plus remarquer que les pics des valeurs propres de couplage correspondent aux pics des mobilités des systèmes découplés bloqués (données en Figure 1.3). La propriété remarquée dans le cas de 2 systèmes se vérifie donc aussi pour 3 systèmes.

Remarque

L'étude de l'Eq. A1-9 indique que si deux ressorts de couplage sont de raideur nulle (par exemple k_b et k_c), on retrouve une expression de la valeur propre de couplage identique à celle étudiée au chapitre 1.

De même, si un seul des ressorts de couplage est ôté (par exemple $k_c=0$), alors l'expression de la valeur propre de couplage devient :

$$\lambda^2 = \frac{k_a}{\omega^2} Y_1 Y_2 + Y_1 Y_3 \frac{k_b}{\omega^2}$$

Eq. A1-10

Le phénomène des couples de valeurs propres réapparaît. Il faut noter que bien qu'il y ait 3 systèmes à 1 degré de liberté, la configuration dépend de la manière dont les sous-systèmes sont formés.

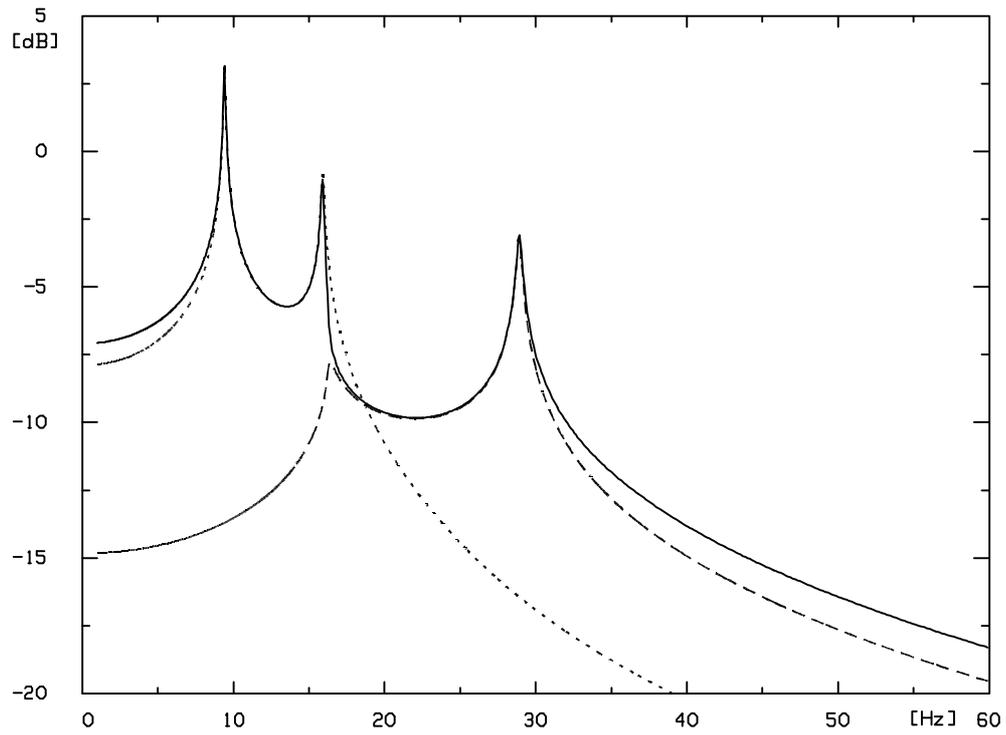


Figure 1.2 : Valeurs propres de couplage pour trois systèmes à un degré de liberté

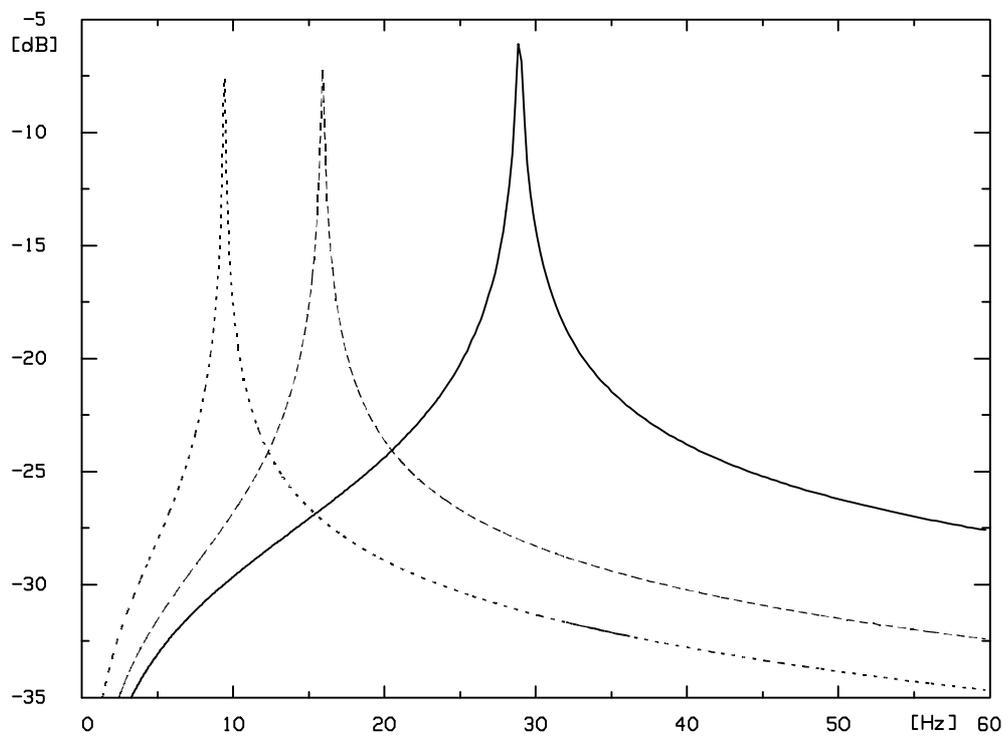


Figure 1.3 : Module des mobilités des 3 systèmes à un degré de liberté en fonction de la fréquence

ANNEXE 2

Calcul de la vitesse de référence à partir des quantités propres de couplage

Annexe 2 : Calcul de la vitesse de référence à partir des quantités propres de couplage

On cherche à retrouver l'expression Eq. 1.7 à partir de l'expression qui est fonction des quantités propres de couplage Eq. 1.32. Pour cela, on cherchera dans un premier temps à tout exprimer en fonction des mobilités par l'intermédiaire des équations Eq. 1.31, Eq. 1.16, Eq. 1.15 et Eq. 1.9 tout en gardant à l'esprit l'expression des mobilités, c'est-à-dire l'Eq. 1.4.

On effectuera le calcul sur la vitesse du système 1, étant entendu que la vitesse du système 2 a une expression symétrique.

$$w_1 = w_{o1} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \alpha_{o2} \Phi_1 + \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} \alpha_{o1} \Phi_1$$

Eq. A2.1

On remplace les facteurs propres et les vitesses du système découplé bloqué par leurs expressions qui sont fonction des forces appliquées. Le vecteur propre de couplage est lui aussi exprimé en fonction de la mobilité :

$$w_1 = Y_1 F_{o1} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \frac{Y_2 F_{o2}}{\sqrt{Y_2}} \sqrt{Y_1} + \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} \frac{Y_1 F_{o1}}{\sqrt{Y_1}} \sqrt{Y_1}$$

Eq. A2.2

Après simplifications, la quantité $\sqrt{Y_1 Y_2}$ apparaît dans le terme central. Cette quantité est utilisée pour introduire la valeur propre de couplage selon l'Eq. 1.15 :

$$w_1 = Y_1 F_{o1} + \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} \frac{j\omega}{k_c} F_{o2} + \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} Y_1 F_{o1}$$

Eq. A2.3

Les termes de forces sont alors mis en facteur :

$$w_1 = Y_1 F_{o1} \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}} + \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}} + F_{o2} \frac{j\omega}{k_c} \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}$$

Eq. A2.4

La parenthèse donne une expression plus simple et la quantité $\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}$ est mise à son tour en facteur :

$$w_1 = \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} \frac{\mathfrak{a} Y_1 F_{o1}}{\mathfrak{c} \lambda^2} + F_{o2} \frac{j\omega \mathfrak{b}}{k_c \mathfrak{d}}$$

Eq. A2.5

Le développement du facteur $\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}$, en fonction des mobilités et de la raideur de couplage, donne :

$$\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} = \frac{\frac{k_c^2}{(j\omega)^2} Y_1 Y_2}{1 + \frac{k_c^2}{\omega^2} Y_1 Y_2}$$

Eq. A2.6

On reconnaît, à $\frac{k_c^2}{(j\omega)^2}$ près, le facteur de l'Eq. 1.7. Il ne reste qu'à introduire l'Eq. A2.6 dans l'Eq. A2.5, et à remplacer la valeur propre de couplage au carré par son expression pour arriver à :

$$w_1 = \frac{Y_1 Y_2}{1 + \frac{k_c^2}{\omega^2} Y_1 Y_2} \frac{Y_1 F_{o1}}{\frac{k_c^2}{(j\omega)^2} Y_1 Y_2} + F_{o2} \frac{j\omega}{k_c} \frac{k_c^2}{(j\omega)^2}$$

Eq. A2.7

Les simplifications évidentes mène à l'Eq. 1.7 recherchée :

$$w_1 = \frac{Y_1 Y_2}{1 + \frac{k_c^2}{\omega^2} Y_1 Y_2} F_{o1} + \frac{k_c}{j\omega} F_{o2}$$

Eq. A2.8

Ce calcul démontre que les valeurs propres de couplage telles qu'elle ont été définies, ainsi que l'expression qui les utilise (cf. Eq. 1.31), permettent bien de trouver une expression de la vitesse des systèmes couplés égale à la solution de référence.

ANNEXE 3

Données numériques

Annexe 3 : Sommaire

A3.1. CONFIGURATION DE BASE

A3.2. CHAPITRE 3 : UN SEUL RESSORT DE COUPLAGE

A3.3. : CHAPITRE 4 : N_K RESSORTS DE COUPLAGE

Annexe 3 : Données numériques

Les données numériques qui sont utilisées dans les applications numériques des chapitre 3 et chapitre 4 sont données maintenant.

A3.1. CONFIGURATION DE BASE

La configuration de base qui sert aux applications numérique, quel que soit le nombre de ressorts de couplage, est donnée ici :

	Plaque 1	Plaque 2
Longueur (m)	1,4	1,7
Largeur (m)	1	1,2
Epaisseur (m)	0,01	0,02
Force d'excitation (N)	100 000	0
Coordonnées Force (m)	(0,11 ; 0,11)	(0,11 ; 0,11)
Matériau de la plaque	Acier	Acier

Tableau A3.1 : Caractéristiques des plaques

Matériau	Acier
Module d'Young (N.m ⁻²)	2,1 10 ¹¹
Coefficient de Poisson	0,31
Masse volumique (kg.m ⁻³)	7800
Amortissement structural	1 %

Tableau A3.2 : Caractéristiques du matériau dont sont constituées les plaques

A3.2. CHAPITRE 3 : UN SEUL RESSORT DE COUPLAGE

Dans le cas où un seul ressort de couplage relie les deux plaques, les caractéristiques de ce ressort sont :

Ressort	
Raideur (N.m ⁻¹)	10 ⁷
Coordonnées plaque 1 (m)	(0,38 ; 0,38)
Coordonnées plaque 2 (m)	(0,38 ; 0,38)

Tableau A3.3 : Caractéristiques du ressort de couplage

A3.3. CHAPITRE 4 : N_K RESSORTS DE COUPLAGE

Dans ce chapitre, les données relatives aux dimensions des plaques, à la force d'excitation ne changent pas. Seuls les ressorts sont plus nombreux ; ils prennent les valeurs suivantes :

	Raideur (N.m⁻¹)	Coordonnées (m) plaque 1	Coordonnées (m) plaque 2
Ressort 1	10 ⁵	(0,38 ; 0,38)	(0,38 ; 0,38)
Ressort 2	10 ⁵	(0,99 ; 0,88)	(0,99 ; 0,88)
Ressort 3	10 ⁵	(0,10 ; 0,30)	(0,10 ; 0,30)
Ressort 4	10 ⁵	(0,19 ; 0,39)	(0,19 ; 0,39)
Ressort 5	10 ⁵	(0,27 ; 0,78)	(0,27 ; 0,78)
Ressort 6	10 ⁵	(0,87 ; 0,87)	(0,87 ; 0,87)
Ressort 7	10 ⁵	(0,25 ; 0,78)	(0,25 ; 0,78)
Ressort 8	10 ⁵	(0,55 ; 0,69)	(0,55 ; 0,69)
Ressort 9	10 ⁵	(0,66 ; 0,77)	(0,66 ; 0,77)

ANNEXE 4

Relations entre les quantités propres globales et les quantités propres isolées

ANNEXE 4 - SOMMAIRE

A4.1. COEFFICIENTS DE CORRESPONDANCE ENTRE LES VECTEURS PROPRES DE COUPLAGE ISOLEES

A4.2. MATRICE DE PASSAGE ENTRE LES QUANTITES PROPRES DE COUPLAGE GLOBALES ET ISOLEES

A4.3. CALCUL DES COEFFICIENTS PROPRES GLOBAUX DES SYSTEMES DECOUPLES BLOQUES ρ_{oik}

A4.1. COEFFICIENTS DE CORRESPONDANCE ENTRE LES VECTEURS PROPRES DE COUPLAGE ISOLÉS

Ce paragraphe développe les calculs correspondant aux résultats donnés au § 4.5.2.

Chaque vecteur propre de couplage isolé “i” peut s’exprimer en fonction d’un autre vecteur propre de couplage isolé “j” par la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} \bar{\Phi}_{1i} \bar{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{i}} \bar{\Phi}_{2i} \bar{\mathbf{y}} \end{pmatrix} = \left\{ \bar{\mathbf{R}}_{ij} \right\} + \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} b_{1ij} \bar{\Phi}_{1j} \bar{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{i}} b_{2ij} \bar{\Phi}_{2j} \bar{\mathbf{y}} \end{pmatrix}$$

Eq. A4.1

Cette décomposition est unique car la projection est orthogonale. On fait apparaître un vecteur résidu $\left\{ \bar{\mathbf{R}}_{ij} \right\}$, élément de l’espace complémentaire à l’espace engendré par le $j^{\text{ème}}$ vecteur propre de couplage isolé. A ce titre, son produit avec la $j^{\text{ème}}$ matrice de couplage isolé est nul :

$$\overline{\overline{\mathbf{C}}_j} \left\{ \bar{\mathbf{R}}_{ij} \right\} = \left\{ \bar{\mathbf{0}} \right\}$$

Eq. A4.2

Appliquons la $j^{\text{ème}}$ matrice de couplage isolée au vecteur propre défini par l’Eq. A4.1 :

$$\overline{\overline{\mathbf{C}}_j} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} \bar{\Phi}_{1i} \bar{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{i}} \bar{\Phi}_{2i} \bar{\mathbf{y}} \end{pmatrix} = \overline{\overline{\mathbf{C}}_j} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} b_{1ij} \bar{\Phi}_{1j} \bar{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{i}} b_{2ij} \bar{\Phi}_{2j} \bar{\mathbf{y}} \end{pmatrix}$$

Eq. A4.3

Le membre de droite de l’Eq. A4.3 fait ressortir le produit d’une matrice de couplage isolée par son vecteur propre associé. Classiquement, on observe l’émergence de la valeur propre de couplage et la permutation des facteurs b_{1ij} et b_{2ij} :

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{0}} \\ \hat{\mathbf{e}} \overline{\overline{\mathbf{C}}_{21j}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 \bar{\Phi}_{1i} \bar{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}}_1 \bar{\Phi}_{2i} \bar{\mathbf{y}} \end{pmatrix} = \lambda_j \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} b_{2ij} \bar{\Phi}_{1j} \bar{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{i}} b_{1ij} \bar{\Phi}_{2j} \bar{\mathbf{y}} \end{pmatrix}$$

Eq. A4.4

Toutes les expressions analytiques et vectorielles des quantités de l’Eq. A4.4 précédente sont connues et ont été explicitées dans le chapitre 3. Il suffit de les remplacer pour connaître l’expression des facteurs b_{kij} , ce qui est fait dans le cas de la recherche de b_{2ij} :

$$\frac{k_j}{j\omega} \overline{\overline{\mathbf{Z}}_{11}}^{-1} \bar{\Psi}_{1j}(Q_{1j}) \bar{\Psi}_{2j}(Q_{2j})^t \frac{\overline{\overline{\mathbf{Z}}_{22}}^{-1}}{\sqrt{Y_2(Q_{2i})}} \bar{\Psi}_{2i}(Q_{2i}) = \frac{k_j}{j\omega} \frac{\sqrt{Y_1(Q_{1j}) Y_2(Q_{2j})}}{\sqrt{Y_1(Q_{1j})}} \overline{\overline{\mathbf{Z}}_{11}}^{-1} \bar{\Psi}_{1j}(Q_{1j}) b_{2ij}$$

Eq. A4.5

Après recombposition, regroupements et simplifications, l'expression analytique du facteur b_{2ij} s'écrit :

$$b_{2ij} = \frac{Y_2(Q_{2i}, Q_{2j})}{\sqrt{Y_2(Q_{2i})} \sqrt{Y_2(Q_{2j})}}$$

Eq. A4.6

Des expressions complètement symétriques sont obtenues pour b_{1ij} de sorte que l'expression analytique du facteur b_{1ij} s'écrit :

$$b_{1ij} = \frac{Y_1(Q_{1i}, Q_{1j})}{\sqrt{Y_1(Q_{1i})} \sqrt{Y_1(Q_{1j})}}$$

Eq. A4.7

On définit l'expression $Y_1(Q_{1i}, Q_{1j})$ comme la mobilité de transfert entre les points de connexion des ressorts i et j de la plaque 1. Son expression littérale, établie dans le chapitre 3, provient de la définition des termes de mobilité :

$$Y_1(Q_{1i}, Q_{1j}) = \tilde{\Psi}_{1k}(Q_{1i}) \overline{\overline{Z_{11k}}}^{-1} \tilde{\Psi}_{1k}(Q_{1j})$$

Eq. A4.8

On rassemble les coefficients b_{kij} dans des matrices $\overline{\overline{B_1}}$ et $\overline{\overline{B_2}}$, chacune de dimensions $(N_k \times N_k)$ et de termes génériques :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{B_1}}_{ij} &= b_{1ij} \\ \overline{\overline{B_2}}_{ij} &= b_{2ij} \end{aligned}$$

Eq. A4.9

Il faut remarquer que les matrices de correspondance sont symétriques (puisque la mobilité de transfert est symétrique) et que leur diagonale vaut un.

A4.2. MATRICE DE PASSAGE ENTRE LES QUANTITES PROPRES DE COUPLAGE GLOBALES ET ISOLEES

Ce paragraphe détaille les calculs et démontre les résultats exposés au § 4.5.3.

On cherche un moyen de passage entre les quantités propres isolées et globales, autant pour les valeurs propres de couplage que les vecteurs propres de couplage.

On suppose qu'il existe une matrice de passage $\overline{\overline{A}}$ entre les N_k vecteurs propres de couplage globaux $\{\overline{\overline{\Phi}}_i\}$ et les N_k vecteurs propres de couplage isolés $\{\overline{\Phi}_i\}$.

Si la matrice $\begin{matrix} \overline{\overline{e}}_{\Phi_1} \overline{\overline{u}} \\ \overline{\overline{e}}_{\Phi_2} \overline{\overline{u}} \end{matrix}$ représente les N_k vecteurs propres globaux et $\begin{matrix} \overline{e}_{\Phi_1} \overline{u} \\ \overline{e}_{\Phi_2} \overline{u} \end{matrix}$ la matrice des

N_k vecteurs propres isolés, toutes deux de dimensions $(M+N \times N_k)$, la matrice de passage $\overline{\overline{A}}$ qui les relie est de dimensions $(2N_k \times 2N_k)$ et se définit comme suit :

$$\begin{matrix} \overline{\overline{e}}_{\Phi_1} \overline{\overline{u}} & \overline{\overline{e}}_{\Phi_1} \overline{\overline{u}} \overline{\overline{A}}_1 & \overline{0} \overline{u} \\ \overline{\overline{e}}_{\Phi_2} \overline{\overline{u}} & \overline{\overline{e}}_{\Phi_2} \overline{\overline{u}} \overline{\overline{A}}_2 & \overline{A}_2 \overline{u} \end{matrix}$$

Eq. A4.10

Les termes génériques de la matrice de passage $\overline{\overline{A}}$ sont dénommés "a" et se notent :

$$\begin{matrix} \overline{\overline{A}}_1 \\ \overline{\overline{A}}_2 \end{matrix} (A_i)_{ij} = a_{ij}$$

Eq. A4.11

Les contributions du couplage qui apparaissent dans les équations qui donnent les vitesses après couplage au moyen des quantités propres de couplage globales ou isolées (cf. Eq. 4.20 et Eq. 4.49) sont identiques. Elles permettent d'écrire :

$$\begin{matrix} \overline{\overline{C}}_1 \overline{\overline{w}}_1 \overline{\overline{u}} \\ \overline{\overline{C}}_2 \overline{\overline{w}}_2 \overline{\overline{u}} \end{matrix} = \overline{\overline{a}} \begin{matrix} \overline{\overline{p}}_{2i} \overline{\overline{\Phi}}_{1i} \overline{\overline{u}} \\ \overline{\overline{p}}_{1i} \overline{\overline{\Phi}}_{2i} \overline{\overline{u}} \end{matrix} = \overline{\overline{a}} \begin{matrix} \overline{\overline{\lambda}}_i \overline{\overline{\alpha}}_{2i} \overline{\overline{\Phi}}_{1i} \overline{\overline{u}} \\ \overline{\overline{\lambda}}_i \overline{\overline{\alpha}}_{1i} \overline{\overline{\Phi}}_{2i} \overline{\overline{u}} \end{matrix}$$

Eq. A4.12

Les deux termes de droite de l'Eq. A4.12 décrivent le même sous-espace, donc les bases des vecteurs propres de couplage globales et isolés sont de mêmes dimensions. Tout vecteur propre d'une des bases peut s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs propres de l'autre base. Ainsi, le passage d'une base de vecteurs propres à l'autre s'effectue par :

$$\begin{matrix} \overline{\overline{\Phi}}_{1i} \overline{\overline{u}} \\ \overline{\overline{\Phi}}_{2i} \overline{\overline{u}} \end{matrix} = \overline{\overline{a}} \begin{matrix} \overline{\overline{a}}_{1ij} \overline{\overline{\Phi}}_{1j} \overline{\overline{u}} \\ \overline{\overline{a}}_{2ij} \overline{\overline{\Phi}}_{2j} \overline{\overline{u}} \end{matrix}$$

Eq. A4.13

Dans l'équation fondamentale des quantités propres, c'est-à-dire l'Eq. 4.11, on remplace les expressions des vecteurs propres globaux par leurs expressions en fonction des vecteurs propres isolés (cf. Eq. 4.15 et Eq. A4.13). L'équation suivante en résulte :

$$\sum_{j=1}^N C_j \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{a}}_i a_{1ki} \bar{\Phi}_{li} \bar{\mathbf{u}} = \Lambda_k \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{a}}_j a_{1kj} \bar{\Phi}_{1j} \bar{\mathbf{u}}$$

Eq. A4.14

On regroupe sous le même signe somme les termes du membre de gauche :

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{a}}_j C_j \hat{\mathbf{a}}_i a_{1ki} \bar{\Phi}_{li} \bar{\mathbf{u}} = \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{a}}_j \Lambda_k a_{1kj} \bar{\Phi}_{1j} \bar{\mathbf{u}}$$

Eq. A4.15

On peut réécrire le produit du membre de gauche en se servant de l'Eq. A4.1 et en faisant apparaître toutes les quantités propres associées à l'indice j de la $j^{\text{ème}}$ matrice de couplage. Ceci n'est possible qu'avec l'aide des coefficients de correspondance b_{kij} définis au paragraphe précédent. L'action de la $j^{\text{ème}}$ matrice de couplage produit la permutation des facteurs propres et l'apparition de la $j^{\text{ème}}$ valeur propre de couplage :

$$C_j \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{a}}_i a_{1ki} \bar{\Phi}_{li} \bar{\mathbf{u}} = \lambda_j \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{a}}_i a_{2ki} b_{2ij} \bar{\Phi}_{1j} \bar{\mathbf{u}}$$

Eq. A4.16

En réintroduisant la double sommation sur j et sur i de cette expression, le terme de gauche de l'Eq. A4.15 s'exprime finalement :

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{a}}_j C_j \hat{\mathbf{a}}_i a_{1ki} \bar{\Phi}_{li} \bar{\mathbf{u}} = \sum_j \hat{\mathbf{a}}_j \lambda_j \sum_i \hat{\mathbf{a}}_i a_{2ki} b_{2ij} \bar{\Phi}_{1j} \bar{\mathbf{u}}$$

Eq. A4.17

Il ne reste qu'à égaliser les membres de droite de l'Eq. A4.17 et de l'Eq. A4.15 :

$$\sum_j \hat{\mathbf{a}}_j \lambda_j \sum_i \hat{\mathbf{a}}_i a_{2ki} b_{2ij} \bar{\Phi}_{1j} \bar{\mathbf{u}} = \sum_j \hat{\mathbf{a}}_j \Lambda_k a_{1kj} \bar{\Phi}_{1j} \bar{\mathbf{u}}$$

Eq. A4.18

L'identification des vecteurs propres de couplage isolés fournit une relation entre les valeurs propres globales Λ_k et isolées λ_j telle que :

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \Lambda_k \mathbf{a}_{1kj} &= \lambda_j \mathbf{a}_{2ki} \mathbf{b}_{2ij} \\ \mathbf{i} \Lambda_k \mathbf{a}_{2kj} &= \lambda_j \mathbf{a}_{1ki} \mathbf{b}_{1ij} \end{aligned}$$

Eq. A4.19

Qui, pour la $k^{\text{ème}}$ composante considérée se note :

$$\Lambda_k \begin{pmatrix} \mathbf{i} \bar{\mathbf{a}}_{1k} \\ \mathbf{i} \bar{\mathbf{a}}_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}} & 0 \\ \hat{\mathbf{e}} & \hat{\mathbf{V}}_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{V}}_{12} & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{V}}_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{y}} \end{pmatrix}$$

Eq. A4.20

Une matrice $\bar{\bar{\mathbf{V}}}$ apparaît avec des sous-matrices diagonales nulles (c'est-à-dire de même forme que la matrice de couplage) :

$$\bar{\bar{\mathbf{V}}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}} & 0 \\ \hat{\mathbf{e}} & \hat{\mathbf{V}}_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\bar{\mathbf{u}}} \\ \bar{\bar{\mathbf{y}}} \end{pmatrix}$$

Eq. A4.21

L'expression générique de la matrice $\bar{\bar{\mathbf{V}}}$ est définie par :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\mathbf{V}}}_{12} &= \lambda_i \mathbf{b}_{2ji} \\ \bar{\bar{\mathbf{V}}}_{21} &= \lambda_i \mathbf{b}_{1ji} \end{aligned}$$

Eq. A4.22

Cette matrice $\bar{\bar{\mathbf{V}}}$ est d'un intérêt fondamental pour le passage des quantités propres de couplage isolées aux quantités propres globales. En effet :

- les valeurs propres de la matrice $\bar{\bar{\mathbf{V}}}$ sont les valeurs propres de couplage globales Λ_i ,
- l'ensemble des vecteurs propres de $\bar{\bar{\mathbf{V}}}$ forme la matrice $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$. Les termes des vecteurs propres sont les coefficients qui permettent de reconstruire les vecteurs propres de couplage globaux.

A4.3. CALCUL DES COEFFICIENTS PROPRES GLOBAUX DES SYSTEMES DECOUPLES BLOQUES $\rho_{oi k}$

Ce paragraphe explicite les moyens d'obtenir les résultats du § 4.5.4.

Les coefficients propres ρ_{oi} vont être déterminés en calculant le produit $\overline{C}_k \{\overline{w}_o\}$ de deux manières différentes. La première se sert de l'expression de la vitesse découplée bloquée projetée sur l'ensemble des vecteurs propres de couplage globaux, alors que la seconde projette la vitesse sur un unique vecteur propre de couplage isolé.

L'Eq. 4.21 sert de point de départ à la première partie ; elle représente le vecteur vitesse des systèmes découplés bloqués projeté dans la base des vecteurs propres de couplage globaux. L'action de la $k^{\text{ème}}$ matrice de couplage isolée appliquée à ce vecteur vitesse, permet d'éliminer la composante résiduelle (ce qui sera démontré à la fin du paragraphe sous forme de remarque) et donne :

$$\begin{pmatrix} \overline{e} \\ \overline{e} \\ \overline{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{C}_{12k} \\ \overline{C}_{21k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_1 \\ \overline{u}_1 \end{pmatrix} \overline{w}_{o1} + \begin{pmatrix} \overline{u}_2 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{u}_2 \end{pmatrix} \overline{w}_{o2} = \begin{pmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_1 \\ \overline{u}_1 \end{pmatrix} \overline{y} = \begin{pmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_1 \\ \overline{u}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a}_{12k} \\ \overline{a}_{12k} \\ \overline{a}_{12k} \end{pmatrix} \rho_{o2i} \overline{\Phi}_{2i} + \begin{pmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_1 \\ \overline{u}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a}_{21k} \\ \overline{a}_{21k} \\ \overline{a}_{21k} \end{pmatrix} \rho_{oli} \overline{\Phi}_{li} \begin{pmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_1 \\ \overline{u}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{y} \\ \overline{y} \\ \overline{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{p} \\ \overline{p} \\ \overline{p} \end{pmatrix}$$

Eq. A4.23

Le § A4.2 et l'Eq. A4.13 ont montré que les vecteurs propres globaux peuvent s'écrire en fonction des vecteurs propres isolés par l'intermédiaire de la matrice \overline{A} . Les vecteurs propres globaux de l'Eq. A4.23 sont remplacés par leur expression en fonction des vecteurs propres de couplage isolés :

$$\begin{pmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_1 \\ \overline{u}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a}_{12k} \\ \overline{a}_{12k} \\ \overline{a}_{12k} \end{pmatrix} \rho_{o2i} \overline{\Phi}_{2i} + \begin{pmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_1 \\ \overline{u}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a}_{21k} \\ \overline{a}_{21k} \\ \overline{a}_{21k} \end{pmatrix} \rho_{oli} \overline{\Phi}_{li} = \begin{pmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_1 \\ \overline{u}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a}_{12k} \\ \overline{a}_{12k} \\ \overline{a}_{12k} \end{pmatrix} \rho_{o2i} \begin{pmatrix} \overline{a}_{2ij} \\ \overline{a}_{2ij} \\ \overline{a}_{2ij} \end{pmatrix} \overline{C}_{12k} \overline{\Phi}_{2j} + \begin{pmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_1 \\ \overline{u}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a}_{21k} \\ \overline{a}_{21k} \\ \overline{a}_{21k} \end{pmatrix} \rho_{oli} \begin{pmatrix} \overline{a}_{lij} \\ \overline{a}_{lij} \\ \overline{a}_{lij} \end{pmatrix} \overline{C}_{21k} \overline{\Phi}_{lj} \begin{pmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_1 \\ \overline{u}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{y} \\ \overline{y} \\ \overline{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{p} \\ \overline{p} \\ \overline{p} \end{pmatrix}$$

Eq. A4.24

Le § A4.1 et l'Eq. A4.4 permettent d'écrire n'importe quel vecteur propre de couplage isolé en fonction des autres vecteurs propres de couplage isolés par le biais de facteurs $b_{k ij}$ de la matrice de correspondance. Dans le but de profiter des propriétés des quantités propres, on exprime le $j^{\text{ème}}$ vecteur propre isolé en fonction du $k^{\text{ème}}$. On note l'apparition attendue des valeurs propres de couplage :

$$\begin{matrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \end{matrix} \hat{a}_{\rho_{oi}} \hat{a}_{a_{2ij}} \overline{\overline{C_{12k}}} \overline{\overline{\Phi_{2j}}} \hat{u} = \begin{matrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \end{matrix} \hat{a}_{\rho_{oi}} \hat{a}_{a_{2ij}} \lambda_k b_{2kj} \overline{\overline{\Phi_{1k}}} \hat{u} \\ \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \end{matrix} \hat{a}_{\rho_{oi}} \hat{a}_{a_{1ij}} \overline{\overline{C_{21k}}} \overline{\overline{\Phi_{1j}}} \hat{y} = \begin{matrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \end{matrix} \hat{a}_{\rho_{oi}} \hat{a}_{a_{1ij}} \lambda_k b_{1kj} \overline{\overline{\Phi_{2k}}} \hat{y}$$

Eq. A4.25

Le calcul qui vient d'être mené correspond à l'action d'une matrice de couplage correspondant à une liaison "k" sur le vecteur vitesse découplé bloqué.

Toujours dans la même optique de calculer le produit $\overline{\overline{C_k}} \{\overline{\overline{w_o}}\}$, on exprime le vecteur vitesse des systèmes découplés bloqués, $\overline{\overline{w_{oi}}}$, dans le cas d'une seule parmi les N_k liaisons, avec le $k^{\text{ème}}$ vecteur résidu, les coefficients propres $\alpha_{oi k}$ et les vecteurs propres $\overline{\overline{\Phi_{i k}}}$:

$$\begin{matrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \end{matrix} \overline{\overline{w_{o1}}} \hat{u} = \begin{matrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \end{matrix} \overline{\overline{R_{o1k}}} \hat{u} + \begin{matrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \end{matrix} \alpha_{o1k} \overline{\overline{\Phi_{1k}}} \hat{u} \\ \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \end{matrix} \overline{\overline{w_{o2}}} \hat{p} = \begin{matrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \end{matrix} \overline{\overline{R_{o2k}}} \hat{p} + \begin{matrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \end{matrix} \alpha_{o2k} \overline{\overline{\Phi_{2k}}} \hat{p}$$

Eq. A4.26

L'action de la $k^{\text{ème}}$ matrice de couplage sur ce vecteur conduit à, selon des mécanismes déjà largement expliqués :

$$\begin{matrix} \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \end{matrix} \overline{\overline{0}} \overline{\overline{C_{12k}}} \overline{\overline{w_{o1}}} \hat{u} = \begin{matrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \end{matrix} \lambda_k \alpha_{o2k} \overline{\overline{\Phi_{1k}}} \hat{u} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \end{matrix} \overline{\overline{C_{21k}}} \overline{\overline{0}} \overline{\overline{w_{o2}}} \hat{p} = \begin{matrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \end{matrix} \lambda_k \alpha_{o1k} \overline{\overline{\Phi_{2k}}} \hat{p}$$

Eq. A4.27

L'identification entre le terme de droite de l'Eq. A4.25 et celui de l'Eq. A4.27 permet de déduire l'expression des coefficients propres $\alpha_{oi k}$ des systèmes ayant une liaison isolée en fonction des coefficients propres des systèmes découplés bloqués $\rho_{oi k}$, des coefficients de correspondance $b_{k ij}$ et des coefficients de passage global-isolé $a_{k ij}$:

$$\begin{matrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \end{matrix} \alpha_{o1k} = \begin{matrix} \hat{a} \\ \hat{a} \\ \hat{a} \\ \hat{a} \\ \hat{a} \end{matrix} \rho_{oi} \hat{a}_{a_{1ij}} b_{1jk} \\ \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \end{matrix} \alpha_{o2k} = \begin{matrix} \hat{a} \\ \hat{a} \\ \hat{a} \\ \hat{a} \\ \hat{a} \end{matrix} \rho_{o2i} \hat{a}_{a_{2ij}} b_{2jk}$$

Eq. A4.28

Pour une meilleure lisibilité, cette équation se met sous une forme matricielle :

$$\begin{matrix} \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \end{matrix} \overline{\overline{E_1}} \overline{\overline{0}} \overline{\overline{w_{o1}}} \hat{u} = \begin{matrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \end{matrix} \overline{\overline{\alpha_{o1}}} \hat{u} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \end{matrix} \overline{\overline{0}} \overline{\overline{E_2}} \overline{\overline{w_{o2}}} \hat{p} = \begin{matrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \\ \hat{i} \end{matrix} \overline{\overline{\alpha_{o2}}} \hat{p}$$

Eq. A4.29

La matrice $\overline{\overline{E}}$ est de mêmes dimensions que $\overline{\overline{V}}$ ou $\overline{\overline{A}}$, c'est-à-dire de dimensions $(2 N_k \times 2 N_k)$. L'expression du terme générique de la matrice $\overline{\overline{E}}$ s'établit comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{\bar{i}}(\mathbf{E}_1)_{ij} &= \sum_{k=1}^{N_k} \mathbf{\bar{a}}_{1jk} \mathbf{b}_{1ki} \\ \mathbf{\bar{i}}(\mathbf{E}_2)_{ij} &= \sum_{k=1}^{N_k} \mathbf{\bar{a}}_{2jk} \mathbf{b}_{2ki} \end{aligned}$$

Eq. A4.30

Les entiers i et j décrivent les N_k ressorts de couplage. Les blocs non nuls de $\mathbf{\bar{E}}$ sont sur la diagonale, signe d'un problème bien conditionné. Il suffit donc de résoudre ce système pour connaître la valeur des coefficients propres globaux des systèmes découplés bloqués $\rho_{oi k}$.

On peut remarquer que sous forme matricielle, la matrice $\mathbf{\bar{E}}$ se calcule à partir des matrices $\mathbf{\bar{A}}$ et $\mathbf{\bar{B}}$:

$$\mathbf{\bar{E}} = \begin{pmatrix} \mathbf{\bar{A}} \\ \mathbf{\bar{B}} \end{pmatrix}$$

Eq. A4.31

Remarque

On démontre que l'action de la $k^{\text{ème}}$ matrice de couplage isolée sur le résidu provenant de la projection d'un vecteur sur la combinaison linéaire des vecteur propre de couplage globaux, conduit au vecteur nul.

$$\{\bar{X}\} = \{\bar{R}\} + \sum_{i=1}^{N_k} \mathbf{\bar{a}}_{\rho_i} \{\bar{\Phi}_i\}$$

Eq. A4.32

Naturellement, l'action de la matrice de couplage globale sur ce vecteur conduit au vecteur nul puisque le résidu appartient au noyau de l'application représentée par $\mathbf{\bar{C}}$. Or la matrice de couplage globale est constituée d'une somme de matrices de couplage isolées (cf. Eq. 4.15). On écrit :

$$\mathbf{\bar{C}}\{\bar{R}\} = \sum_{j=1}^{N_k} \mathbf{\bar{C}}_j \{\bar{R}\} = \{\bar{0}\}$$

Eq. A4.33

L'action de n'importe laquelle des j matrices de couplage isolées sur un vecteur le dirige selon le $j^{\text{ème}}$ vecteur propre de couplage isolé :

$$\mathbf{\bar{C}}_j \{\bar{R}\} = \{\beta_j \bar{\Phi}_j\}$$

Eq. A4.34

En réintroduisant la sommation sur j , l'Eq. A4.33 s'écrit finalement :

$$\mathbf{\hat{a}} \sum_{j=1}^{N_k} \beta_j \bar{\varphi}_j = \bar{\mathbf{0}}$$

Eq. A4.35

Les j vecteurs propres de couplage isolés sont tous indépendants (puisque les matrices de couplage isolées le sont) et forment une base de l'espace vectoriel associé à \bar{C} (cf.), et donc l'égalité se vérifie si tous les coefficients β_j sont nuls. En conséquence de quoi, $\bar{C}_j \bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{0}}$, quel que soit j .

ANNEXE 5

Caractéristiques expérimentales

ANNEXE 5 - SOMMAIRE

A5.1. DESCRIPTION DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL

- A5.1.1. Les plaques
- A5.1.2. La condition “découplé bloqué”
- A5.1.3. L’excitation
- A5.1.4. Le ressort de liaison
- A5.1.5. Les capteurs de mesure

A5.2. DIMENSIONNEMENTS ET CARACTERISTIQUES DES ELEMENTS

- A5.2.1. Les plaques
- A5.2.2. Les masses bloquantes
- A5.2.3. Les pertes par amortissement
- A5.2.4. L’isolement vibratoire
- A5.2.5. Les ressorts de liaison

A5.3. CARACTERISATION EXPERIMENTALE DES ELEMENTS

- A5.3.1. La tête d’impédance
- A5.3.2. Le ressort de liaison
- A5.3.3. La masse bloquante
- A5.3.4. La condition “découplée bloquée”
- A5.3.5. La réciprocity
- A5.3.6. La vitesse de la plaque 1, couplée et découplée bloquée

Annexe 5 : Caractéristiques expérimentales

A5.1. DESCRIPTION DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL

A5.1.1. Les plaques

Les deux plaques sont de même largeur mais de longueur et d'épaisseur différente. On a choisi une dimension identique de manière à ce que les plaques se correspondent lorsqu'elles sont accrochées aux potences. Ainsi, les trous destinés aux liaisons ont pu être facilement percés exactement en regard. Chaque trou est taraudé avec un angle de 60° pour que la vis à tête conique qui maintiendra la liaison s'insère parfaitement, et donc ne dépasse pas (cf. Figure A5.5). C'est un détail important parce qu'ainsi, on peut placer correctement les accéléromètres en regard de la liaison.

Les plaques sont suspendues à deux solides potences en forme de tréteau. Chaque potence reçoit une extrémité de chaque plaque. Les liaisons qui relient les plaques à la potence sont constituées de fil de pêche en Nylon tressé capable de résister à des charges de plus de 80 kg, c'est-à-dire largement dimensionnées par rapport au poids des plaques (cf. Tableau A5.3). Elles sont attachées aux plaques qui sont percées en leurs coins supérieurs par des émerillons de cerf-volant, eux aussi supportant à une traction de 80 kg.

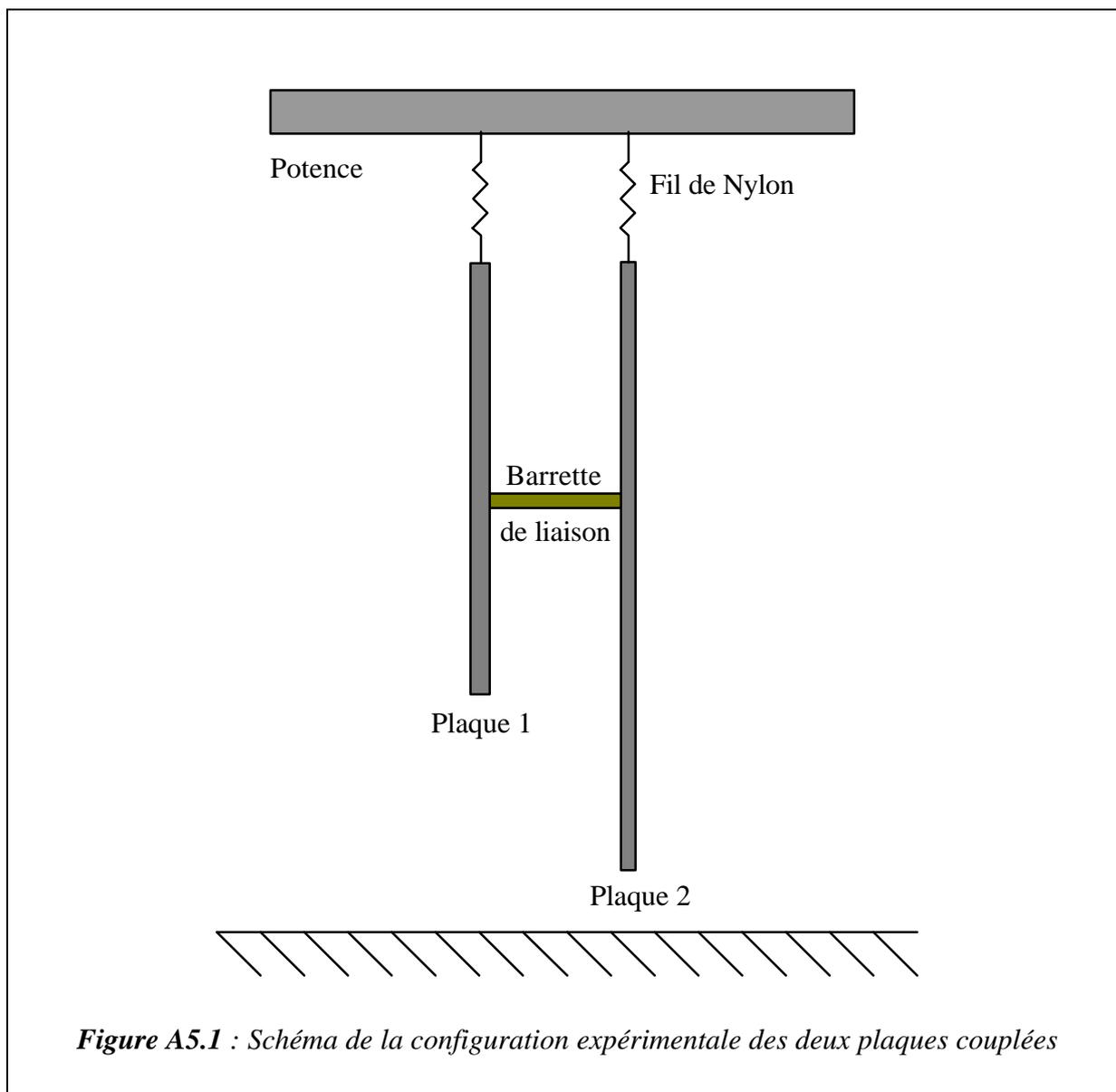
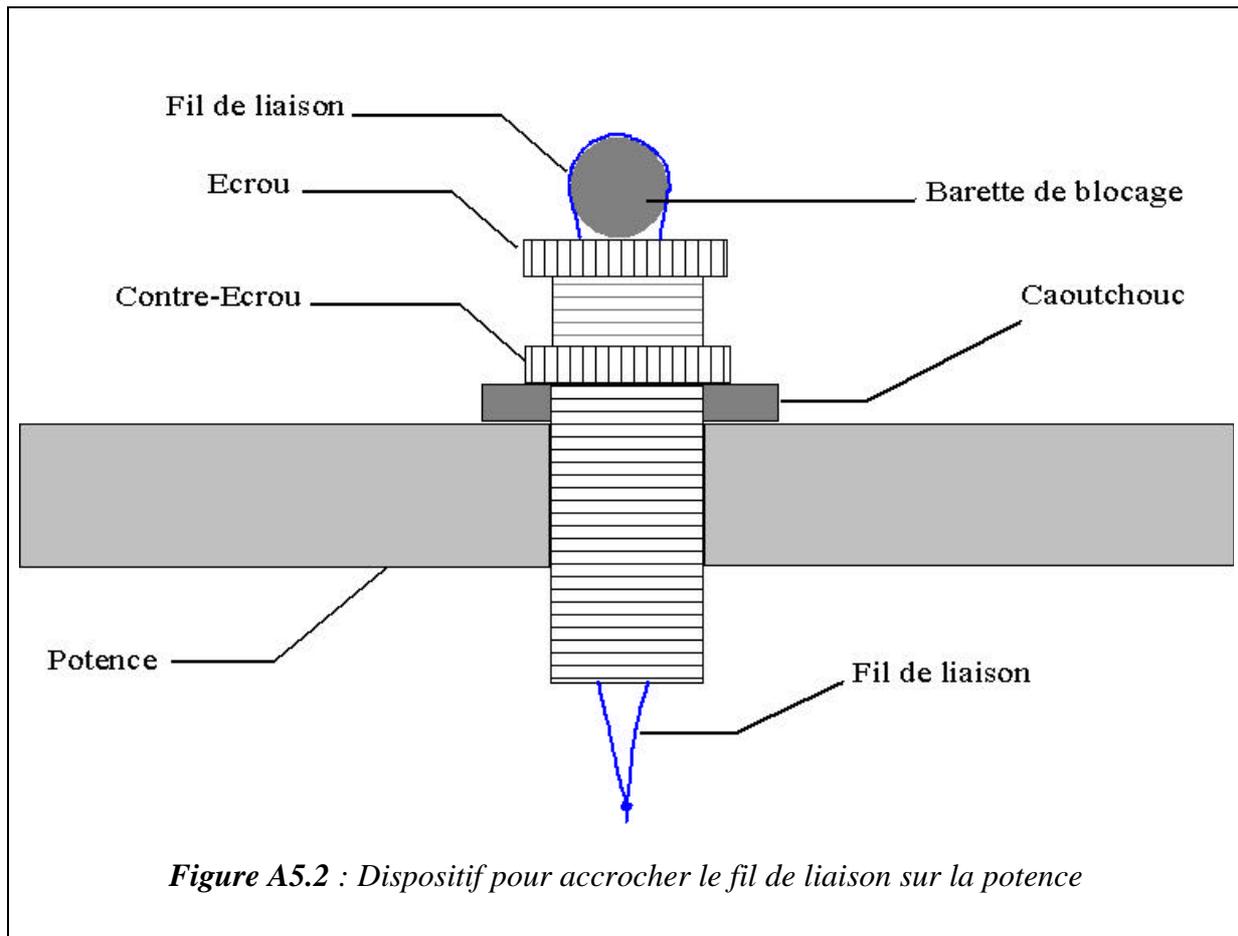


Figure A5.1 : Schéma de la configuration expérimentale des deux plaques couplées

Pour attacher ces fils à la potence avec une possibilité de réglage très fin, on a utilisé des vis creuses en laiton possédant écrou et contre-écrou dont on a percé la tête. Le contre-écrou permet une amplitude de réglage d'environ 1 cm ce qui permet d'ajuster le niveau horizontal des plaques de manière très précise. Il est indispensable de pouvoir régler finement la hauteur des plaques pour que les liaisons soient toujours bien en face. En effet, le fil de Nylon est un peu élastique et sa longueur définitive sous traction demande quelques heures avant de se stabiliser.

Le fil est passé en boucle dans les vis qui traversent la potence et est bloqué au moyen d'une barrette de diamètre lui aussi potentiellement variable. Enfin, une rondelle en caoutchouc mou s'intercale entre la vis et la potence pour éviter les transmissions de vibrations entre les plaques par la potence. Le dispositif de réglage de la hauteur des plaques au niveau de la potence est visible sur la Figure A5.2.



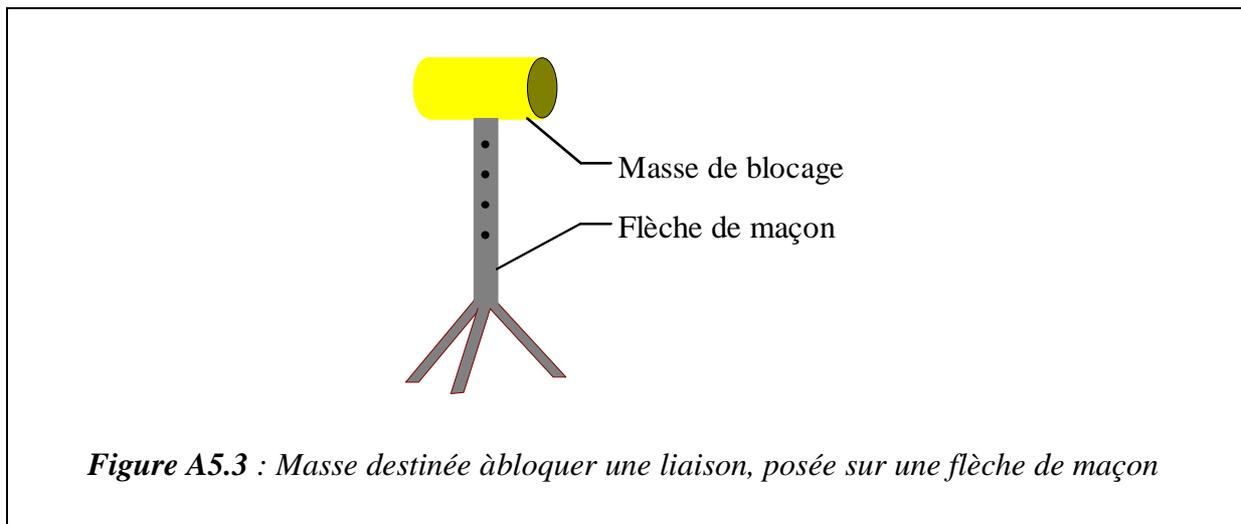
A5.1.2. La condition “découplée bloquée”

Pour revenir sur la disposition des plaques, il faut noter que la condition de plaque découplée bloquée est beaucoup plus facile à réaliser lorsque les plaques sont suspendues que lorsqu'elles sont sur appui simple horizontal. En effet si les plaques sont horizontales, il faut pouvoir placer le ressort sous la plaque jusqu'à la terre ce qui suppose un ajustage parfait de la hauteur (et accessoirement une mauvaise accessibilité étant donnée la longueur des liaisons). Si le ressort était au-dessus de la plaque, le chargement de la masse bloquante serait bien délicat à maintenir dans son axe (problème de fragilité de la liaison, problème de transmissions de moments). Enfin, les deux plaques couplées nécessiteraient un double bâti compliqué à fabriquer. Autant la disposition horizontale est contraignante, autant la disposition verticale présente des avantages. La Figure A5.1 montre les éléments de base du dispositif expérimental en disposition couplée.

La condition de système découplé bloqué s'obtient en bloquant l'une ou l'autre des plaques à l'extrémité de sa (ses) liaison(s) : l'idéal est de disposer d'une masse extrêmement importante comme peut l'être un bloc de béton plein. La première idée avait été de bloquer les

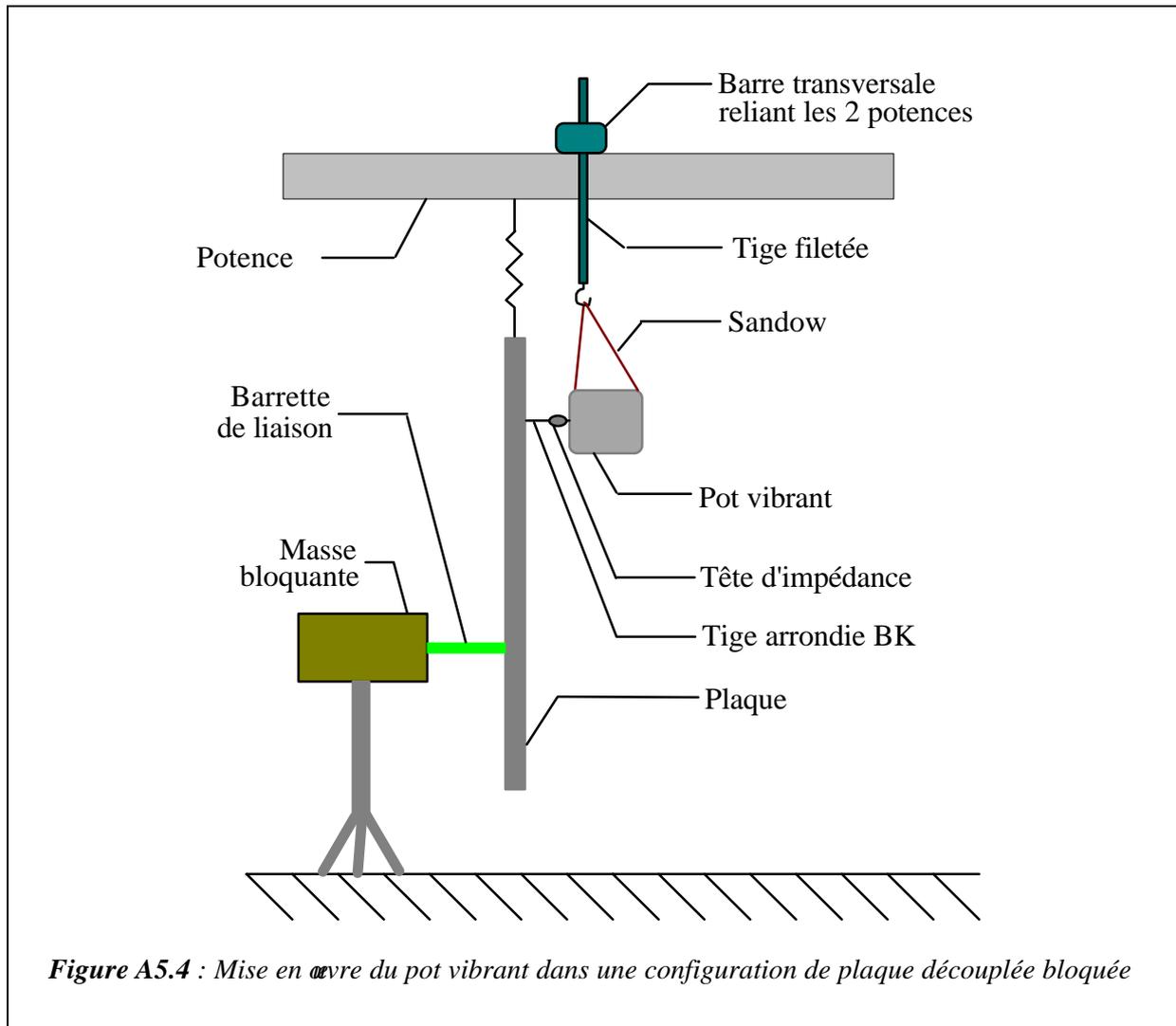
liaisons sur les coins des murs de la salle réverbérante du C.S.T.B., là où le béton atteint plus de 30 cm d'épaisseur. Malheureusement, il est impossible de bloquer directement la liaison sur le mur étant données la forme des potences et la longueur de la liaison. L'idée a été abandonnée.

Le moyen finalement retenu pour bloquer les plaques et la liaison consiste à disposer une masse importante pour chaque ressort. Chaque masse est individuellement soutenue par une flèche de maçon (cf. Figure A5.3), d'où une grande ajustabilité, autant en hauteur qu'en azimut. Le calcul de la masse est expliqué dans le § 5.2.3.



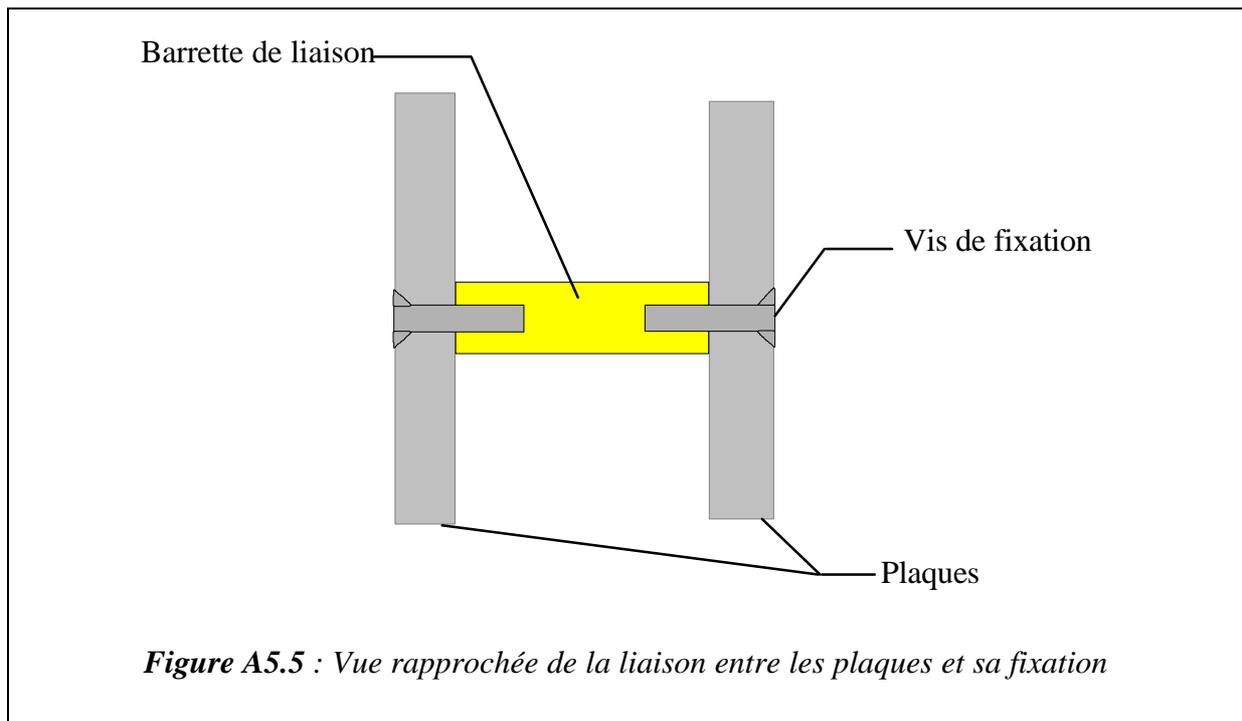
A5.1.3. L'excitation

L'excitation est fournie par un pot vibrant posé contre l'une ou l'autre des plaques avec une faible précontrainte fournie par une très légère angulation. En effet, le pot est suspendu au moyen d'un Sandow à une longue tige filetée permettant une grande précision dans le réglage de la hauteur. La tige filetée est elle-même insérée dans une barre qui relie les deux potences. L'interface qui relie le pot vibrant à la plaque, se fait au moyen d'une petite tige d'origine BK (masse = 3 g) qui présente une extrémité légèrement arrondie. On évite ainsi d'injecter des moments dans la plaque. La Figure A5.4 montre ce montage.



A5.1.4. Le ressort de liaison

Le ressort est constitué d'une petite barrette cylindrique de Plexiglas, en accord avec la théorie du chapitre 2. La barrette est fixée sur les deux plaques au moyen de deux vis. Son diamètre a été choisi suffisamment grand pour pouvoir insérer un filetage dans sa masse et la visser sur la plaque percée. La minimisation des transmissions des moments a été envisagée au moyen d'une gorge au milieu de la barrette qui permettait une légère souplesse de flèche mais la solidité n'étant plus suffisante, l'idée a été abandonnée. Aucun dispositif n'a finalement été appliqué pour lutter contre les éventuels moments sinon un ajustement aussi parfait que possible des deux plaques, de manière à ce que les trous prévus pour les vis de fixation des barrettes de liaison soient exactement en regard.



A5.1.5. Les capteurs de mesure

Les seuls types de mesures réalisés sur ces plaques sont des mesures de mobilité, c'est-à-dire une mesure de vitesse et une mesure de force. Dans le cas du couplage par 3 ressorts qui demande un nombre non négligeable de manipulations, il est confortable d'accéder au maximum de mesures simultanées. Les contraintes de matériels ont finalement fixé le dispositif expérimental suivant : une tête d'impédance (mesure de la force et de la vitesse) et deux accéléromètres. Le système de d'acquisition et de pré-traitement est de type LMS. Le Tableau A5.1 ci-après donne les caractéristiques des capteurs utilisés.

La tête d'impédance est insérée entre le pot vibrant et la tige qui vient s'appuyer sur la plaque. Les accéléromètres sont fixés sur la plaque au moyen de papier collant double face.

Type de capteur	Marque et référence	Divers
Tête d'impédance	Brüel & Kjær 8001	Masse totale : 31 g Masse sismique : 2,2 g
Accéléromètres	Brüel & Kjær 4393	Masse : 2,4 g
Pot vibrant	Brüel & Kjær 4809	Masse : 8,3 kg
Préamplificateurs	Brüel & Kjær 2635	

Tableau A5.1 : Matériel de mesure

A5.2. DIMENSIONNEMENTS ET CARACTERISTIQUES DES ELEMENTS

A5.2.1. Les plaques

Les plaques sont en acier. Pour pouvoir garder une expérience manipulable par une seule personne et pour ne pas être gêné par des problèmes de poids qui obligeraient à disposer de liaisons plaque-potence extrêmement résistantes (sans oublier la sécurité), on limite le poids des plaques à une vingtaine de kilogrammes. Dans le cas où des expériences complémentaires de type énergétique aient été à faire, on a prévu que les densités modales soient fortement différenciées entre les deux plaques (au moins dans un rapport 4)

	Acier
Masse volumique (kg.m ⁻³)	7 800
Module d'Young (kg.m ⁻²)	2,1 10 ¹¹

Tableau A5.2 : Caractéristiques de l'acier

Les densités modales dans une bande sont données par la formule suivante [Cremer 1966] :

$$\frac{\Delta N}{\Delta \omega} = \frac{1}{3.6} \frac{S}{C_L h}$$

Eq. A5.1

S et h sont la surface et l'épaisseur de la plaque, C_L, la vitesse longitudinale associée au matériau de la plaque. N est le nombre de modes et ω, la pulsation.

Les dimensions sont fournies dans le Tableau A5.3 suivant :

	Longueur (m)	Largeur (m)	Epaisseur (mm)	Masse (kg)	Densité modale (nb mode / Hz)
Plaque 1	0,59	0,85	5	19,88	5,19 10 ⁻³
Plaque 2	1,02	0,85	2	13,55	2,21 10 ⁻²

Tableau A5.3 : Dimensions des plaques

Le rapport des densités modales est égal à 4,26.

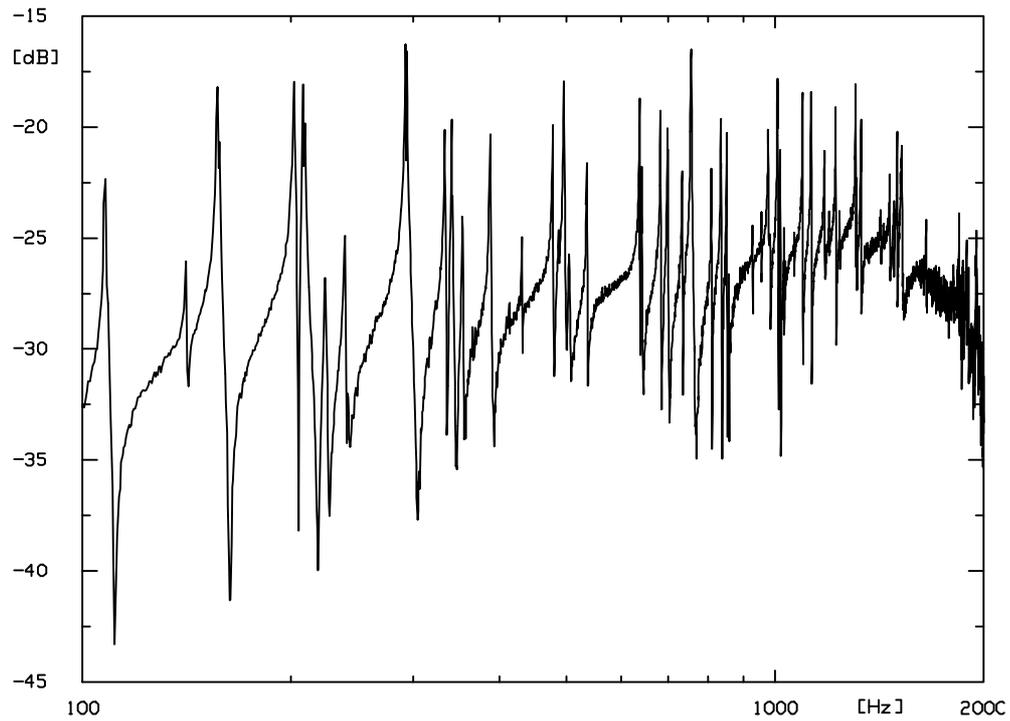


Figure A5.6 : Mobilité d'entrée de la plaque 1 libre en fonction de la fréquence

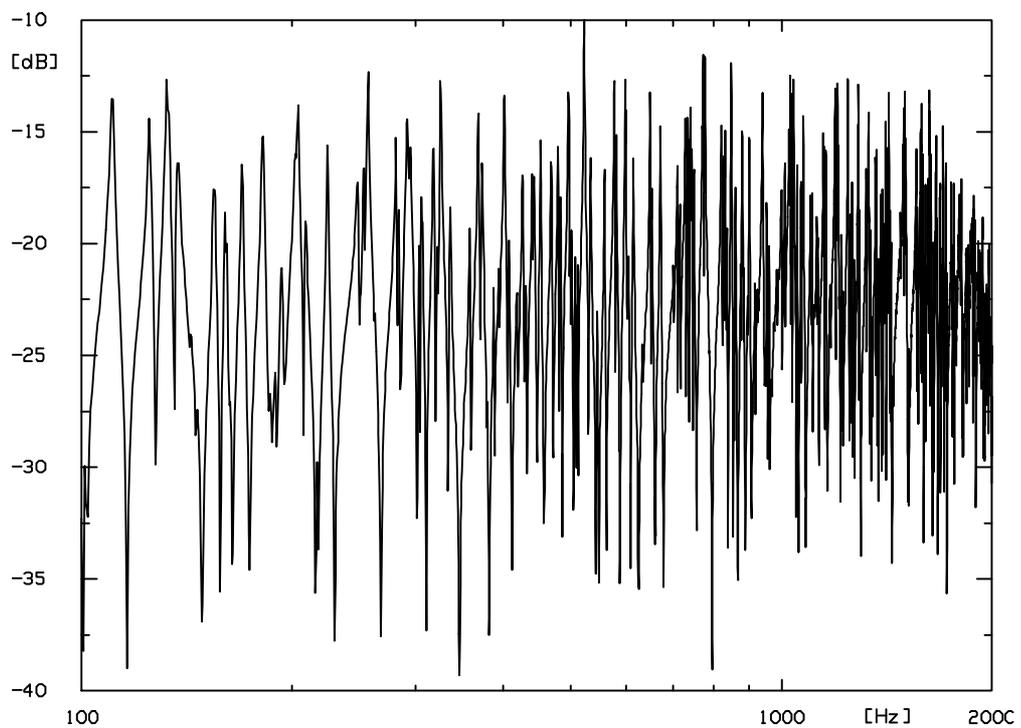


Figure A5.7 : Mobilité d'entrée de la plaque 2 libre en fonction de la fréquence

A5.2.2. Les masses bloquantes

Pour ce qui concerne la condition de systèmes découplés bloqués, et donc des masses bloquantes, on cherche à ce que la mobilité des masses bloquantes soit très inférieure à celle des plaques. Craik [Craik 1991] donne une relation pour le minimum de l'enveloppe de la mobilité d'une plaque :

$$L_L = 10 \log \frac{Y_{inf}}{Y_{\infty}} = 10 \log \frac{4n\eta f}{\pi \omega M}$$

Eq. A5.2

Dans cette relation, Y_{inf} représente la partie inférieure de l'enveloppe de la mobilité, Y_{∞} , la mobilité de la plaque infinie, n la densité modale, h l'amortissement structural et f la fréquence. Si l'on veut que la plaque soit bien bloquée par la masse, cela veut dire que la capacité de mouvement de la masse doit être largement inférieure à celle de la plaque, et donc de même pour leurs mobilités. La mobilité d'une masse M est proportionnelle à $1/\omega M$, si l'on compte une marge de 10 dB, c'est-à-dire un facteur 10 par rapport à l'Eq. A5.2, on a :

$$\frac{10}{\omega M} = \frac{4n\eta f Y_{\infty}}{\pi} = \frac{4}{\pi} \eta Y_{\infty} N_{\text{mod es/bande}}$$

Eq. A5.3

La masse bloquante dépend de la fréquence minimum pour laquelle on veut bloquer la plaque. Il est évident que la mobilité de la masse est de plus en plus petite (de plus en plus bloquante) quand la fréquence croît alors que la limite inférieure de l'enveloppe de la mobilité de la plaque décroît avec la fréquence. Ainsi, le problème va venir des basses fréquences où la masse va avoir du mal à bloquer la plaque.

Le nombre de modes par bande $N_{\text{modes/bande}}$ s'exprime [Lyon 1975] comme :

$$N_{\text{mod es/bande}} = \frac{\sqrt{3} S}{C_L h} f$$

Eq. A5.4

La mobilité de la plaque infinie se calcule par [Cremer 1966] :

$$|Y_{\infty}| = \frac{1}{8 \sqrt{\rho h} \frac{E h^3}{12}}$$

Eq. A5.5

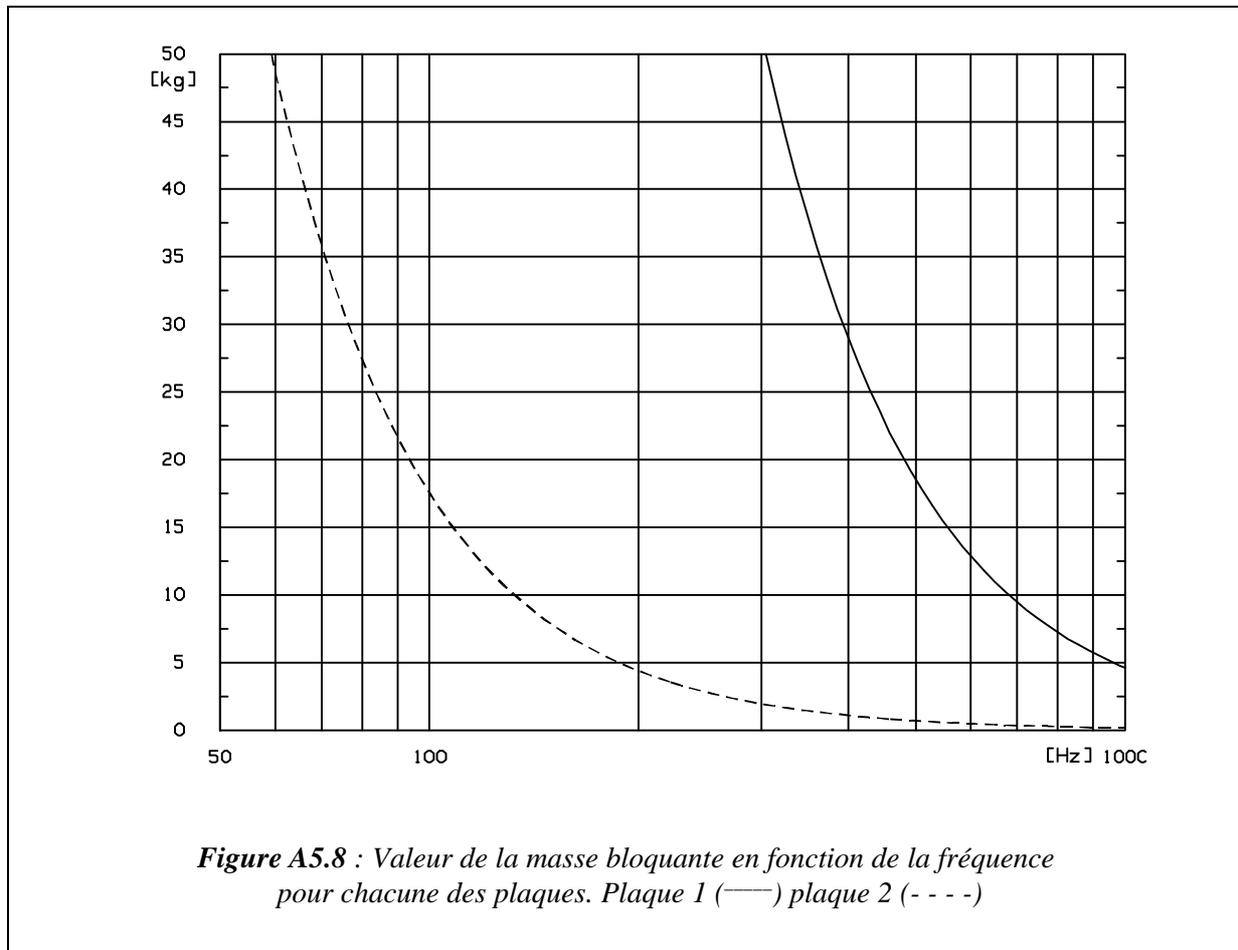
ρ est la masse volumique, h l'épaisseur et E le module d'Young.

La masse bloquante en fonction de la fréquence est alors définie par l'insertion de l'Eq. A5.4 dans l'Eq. A5.3 :

$$M = \frac{10 C_L h}{8 f^2 Y_\infty \eta \sqrt{3} S}$$

Eq. A5.6

La Figure A5.5 montre la représentation graphique de l'Eq. A5.6 pour les deux plaques, quand le facteur d'amortissement structural est égal à 1%.



Comme l'expérience doit rester autant que possible manipulable par une seule personne, la masse de 30 kg est retenue. Ainsi, pour la plaque 1 (la plus difficile à bloquer car la plus pesante), la validité du blocage démarre à environ 400 Hz. Pour la plaque 2, la même masse autorise une fréquence inférieure (environ 75 Hz). Il faut donc s'attendre à des erreurs de mesures avant 400 Hz en configuration découplée bloquée.

Les trois masses sont réalisées à partir de troncs d'acier. Elles sont pourvues de poignées qui permettent de les soulever *relativement* aisément. Le Tableau A5.4 donne les caractéristiques des masses bloquantes :

	Longueur (cm)	Diamètre (cm)	Masse (kg)
Masse Bloquante en acier	20	15	27,6

Tableau A5.4 : Dimensions des masses bloquantes

A5.2.3. Les pertes par amortissement

L'amortissement structural est un autre paramètre des plaques à mesurer. On accède à cet amortissement en mesurant le temps de réverbération (temps nécessaire à une décroissance de 60 dB du niveau de vibration) de chaque plaque en configuration découplée bloquée. En vérité, on ne mesure pas seulement l'amortissement structural des plaques mais aussi les pertes globales du système découplé bloqué.

On pourrait penser qu'il n'y a pas une grande différence de temps de réverbération quand la plaque est libre ou découplée bloquée. En fait, le contact entre le ressort et la masse bloquante est assuré par du papier adhésif double face, qui évite à la barrette de Plexiglas de rebondir sur la masse. Ce papier collant entraîne une dissipation d'énergie non négligeable par la liaison, comparée à la plaque libre. Pour donner un ordre d'idée, dans certaines bandes de fréquences, la plaque libre demande largement plus d'une minute pour que son niveau d'énergie diminue de 60 dB alors que la plaque découplée bloquée ne demande que quelques secondes. Enfin, dernière précision, comme beaucoup de pertes viennent du contact Plexiglas-masse bloquante par l'adhésif double face, le système découplé bloqué a un facteur de pertes différent selon le nombre de liaisons. C'est pourquoi le temps de réverbération a été mesuré pour chaque plaque découplée bloquée dans sa configuration avec un ou trois ressorts.

Les Figure A5.9 et Figure A5.10 suivantes montrent les facteurs d'amortissement des plaques 1 et 2 découplées bloquées en fonction de la fréquence pour chaque configuration, déduits des temps de réverbération T_R par la relation [Lyon 1975] :

$$\eta = \frac{2,2}{f_o T_R}$$

Eq. A5.7

Les facteurs de perte des plaques découplées bloquées en configuration 3 ressorts sont plus élevés que lorsqu'il n'y a qu'un ressort, ce qui était prévisible, compte tenu de ce qui a été dit auparavant. Les premiers modes de vibration de la plaque 1 ne commençant qu'aux alentours de 50 Hz, les valeurs des facteurs de pertes ne sont pas très fiables dans les premiers tiers d'octave.

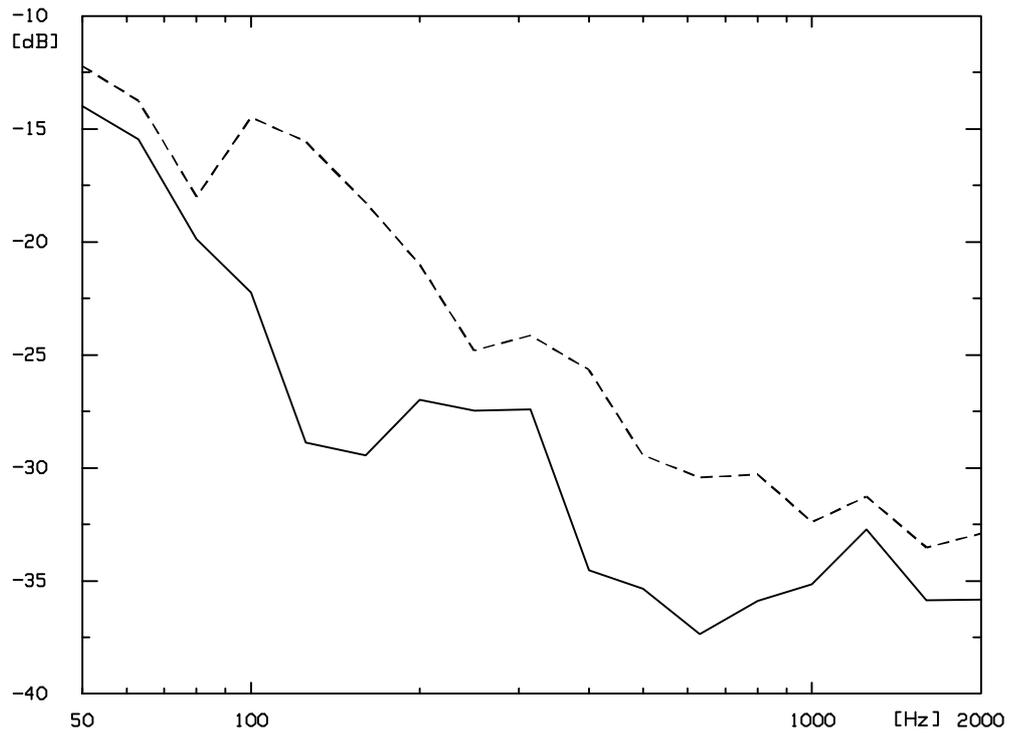


Figure A5.9 : Facteur d'amortissement en fonction de la fréquence (tiers d'octaves) pour la plaque 1 découplée bloquée, configuration 1 ressort (—) ; 3 ressorts (- - - -)

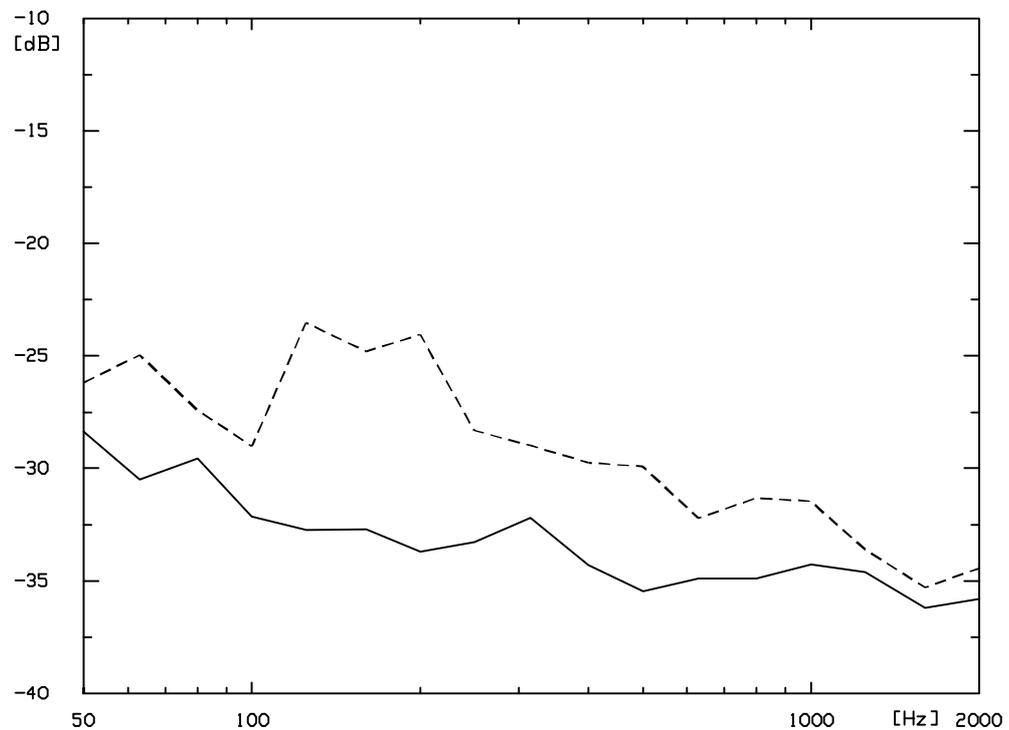
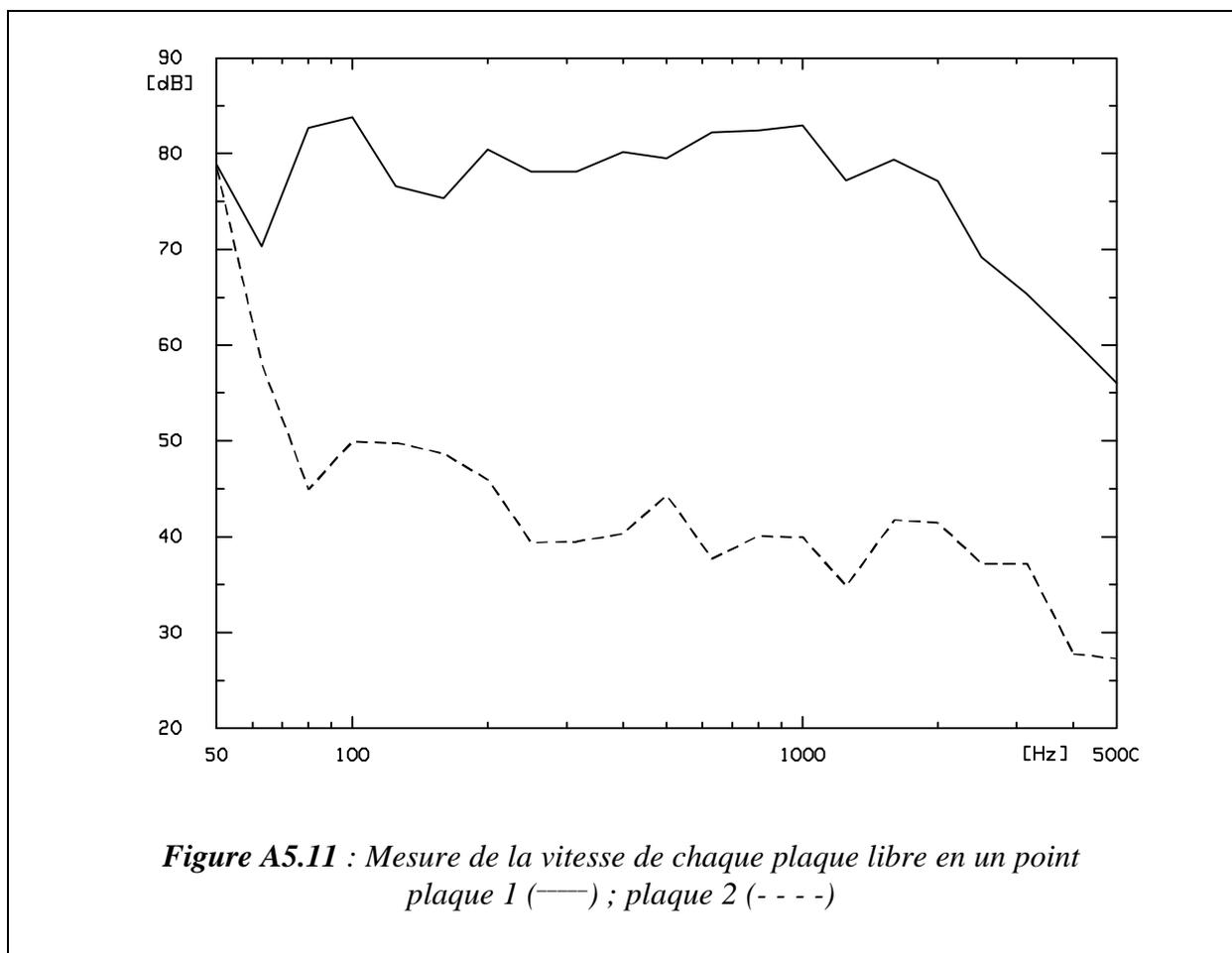


Figure A5.10 : Facteur d'amortissement en fonction de la fréquence (tiers d'octaves) pour la plaque 2 découplée bloquée, configuration 1 ressort (—) ; 3 ressorts (- - - -)

A5.2.4. L'isolement vibratoire

Toutes les précautions ont été prises pour que les deux plaques libres soient bien isolées l'une de l'autre d'un point de vue vibratoire. On vérifie cette assertion en mesurant la vitesse des plaques libres quand seulement l'une d'entre elles est excitée. L'autre sera alors excitée par la transmission des vibrations par le bâti et par le couplage des 10 cm de lame d'air qui sont entre les plaques. La mesure n'a pas besoin d'être extrêmement précise car seul un ordre de grandeur est nécessaire, c'est pourquoi la vitesse n'a été mesurée qu'en un point sur chaque plaque. La Figure A5.11 suivante montre ces vitesses en fonction de la fréquence en tiers d'octaves. La différence arithmétique des courbes mène à l'isolement.



Le Tableau A5.5 suivant résume les niveaux de vitesse globaux de chaque plaque et l'isolement global qui en découle. Cet isolement est de 35,5 dB, ce qui est une très bonne valeur car une fois les plaques couplées, les transmissions par le bâti et le couplage par la lame d'air seront imperceptibles, exception faite de la bande 50 Hz où l'isolement semble très faible. Mais la mesure n'a été faite qu'en un point et il se peut que 50 Hz corresponde à une résonance forte de la plaque 2 non excitée, en ce point. Cela dit, il faudra considérer les

mesures de type couplé en gardant à l'esprit que le couplage du ressort est parfois renforcé par le couplage dû au montage expérimental.

Vitesse (dB) Plaque 1 excitée	Vitesse (dB) Plaque 2 non excitée	Isolement (dB)
91,7	56,2	35,5

Tableau A5.5 : Niveau globaux de vitesse et d'isolement pour les plaques libres

A5.2.5. Les ressorts de liaison

La liaison suit le modèle de la poutre. Avec l'expérience acquise par les nombreux calculs numériques effectués pour les chapitres précédents, on voulait obtenir une raideur équivalente à un ressort d'environ 10^6 N.m^{-1} , qui correspond à une zone de couplage fort aux basses fréquences et à du couplage faible quand les fréquences montent. Les contraintes techniques étaient de garder une longueur raisonnable, c'est-à-dire pas trop petite pour ne pas favoriser l'effet de la lame d'air entre les plaques (transmission aérienne) mais aussi pas trop grande pour éviter les problèmes dus au premier mode longitudinal et au flambement de la poutre. De plus, il fallait pouvoir percer le matériau pour créer un filetage à l'intérieur ce qui supposait un diamètre d'au moins 5 mm, quel que soit le matériau. Fort de ces exigences, le choix s'est porté sur du jonc de Plexiglas (Polyméthacrylate de méthyle) de 6 mm de diamètre et de 10 cm de longueur. Les caractéristiques physiques du matériau sont rappelées dans le Tableau A5.6 et celles de la barrette de liaison dans le Tableau A5.7.

Données fabricant	Module d'Young (N.m^{-2})	Coefficient de Poisson (à 20° C)	Célérité longitudinale (m.s^{-1})	Densité (kg.m^{-3})
Plexiglas	$2,8 \cdot 10^9$	0,39	2 820	1200

Tableau A5.6 : Caractéristiques du Plexiglas (données du fabricant Altulor)

	Longueur (m)	Diamètre (mm)	Raideur théorique (N.m⁻¹)
Liaison	0,1	6	0,79 10 ⁶

Tableau A5.7 : Caractéristiques théoriques de la liaison

Après avoir utilisé les barrettes telles qu'elles sont décrites ci-dessus, on a trouvé que les résultats de mesures de transmission des efforts entre les plaques semblaient indiquer une raideur supérieure à celle calculée alors. Comme les spécifications du module d'Young semblaient sujettes à de grosses dispersions d'un fabricant à l'autre, on a fait procéder à une mesure en traction de la liaison par le Service Matériaux du C.S.T.B. de Grenoble. Ce résultat fait état d'un module d'Young de $3,04 \cdot 10^9 \text{ N.m}^{-2}$ soit une raideur de $0,86 \cdot 10^6 \text{ N.m}^{-1}$ (donc un accroissement de la raideur de 9%). Le Tableau A5.8 indique finalement la raideur de la barrette :

	Module d'Young mesuré (N.m⁻²)	Raideur déduite de la mesure (N.m⁻¹)
Barrette de Plexiglas	$3,04 \cdot 10^9$	$0,86 \cdot 10^6$

Tableau A5.8 : Caractéristiques mesurées de la liaison

Avec ces nouvelles valeurs, il est possible de calculer les premiers modes longitudinaux et de flexion dans la barrette. Dans la configuration encasté-encasté qui correspond à la barrette vissée de chaque côté, l'équation qui décrit la fréquence du n^{ème} mode longitudinal est [Warburton 1976] :

$$f_n = \frac{n}{2L_c} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Eq. A5.8

L_c est la longueur de la barrette et ρ sa masse volumique. En ce qui concerne les modes de flexion, l'équation qui décrit leur fréquence est, pour le n^{ème} mode :

$$f_n = \frac{n}{2L_c^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S_b}}$$

Eq. A5.9

Dans cette expression, I représente le moment d'inertie et S_b la section de la barrette. A partir de ces expressions, les valeurs des premiers modes de chaque type d'onde dans la barrette sont indiquées dans le Tableau A5.9.

	1^{er} mode longitudinal (Hz)	1^{er} mode en flexion (Hz)
Barrette de liaison	7962	375

Tableau A5.9 : Caractéristiques modales mesurées de la liaison

Il est évident que si les modes longitudinaux ne sont pas du tout gênants puisque le domaine de fréquence qui nous intéresse s'arrête à 2000 Hz, en revanche, les modes de flexion sont dans le domaine d'étude. Qui plus est, on ne sait pas dans quelles proportions de tels modes peuvent être générés, étant donnée la géométrie de notre montage expérimental.

Dernière précision, les coordonnées des liaisons sur les plaques ont été choisies pour éviter de se trouver autant que possible sur le noeud ou le ventre d'un mode de basse fréquence. Elles sont données par le Tableau A5.10 suivant et leurs représentations à l'échelle sont portées sur la Figure A5.12 :

	Ressort 1 (m)	Ressort 2 (m)	Ressort 3 (m)
Coordonnées	0,38 ; 0,38	0,215 ; 0,17	0,80 ; 0,23

Tableau A5.10 : Coordonnées des ressorts sur les plaques

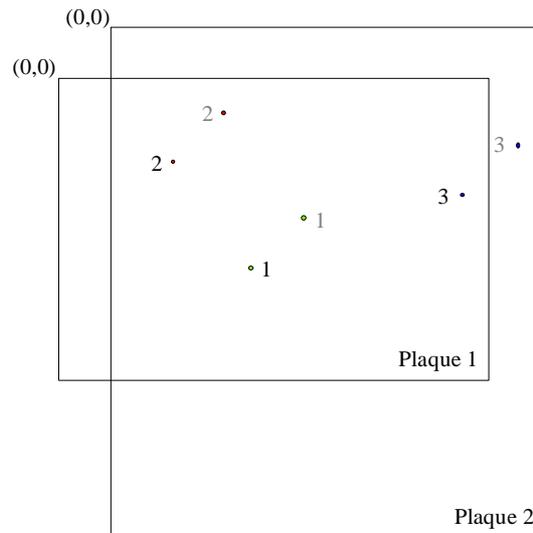


Figure A5.12 : Coordonnées (à l'échelle) des ressorts sur les plaques

4.2.4. Pilotage de la mesure

L'expérience est pilotée par un LMS. Les différentes configurations sont explicitées dans le tableau suivant :

Nombre de voies	4
Bande de fréquence d'acquisition	2000 Hz
Nombre de points d'acquisition	4096
Nombre de moyennes par acquisition	40
Fenêtrage	Hamming

Tableau A5.11 : Descriptif des mesures

A5.3. CARACTERISATION EXPERIMENTALE DES ELEMENTS

Chacun des éléments composant le dispositif expérimental est mesuré indépendamment des autres afin de connaître son comportement.

A5.3.1. La tête d'impédance

Comme le pot vibrant qui excite les plaques déplace aussi la tête d'impédance (cf. Figure A5.4), il faut prendre en compte la masse du capteur, qui est relativement importante, pour corriger la mesure de mobilité d'entrée. La démarche à mettre en œuvre pour opérer cette correction est la suivante. Soient Z_m l'impédance mesurée, Z_s l'impédance du système (à mesurer) et Z_c l'impédance du capteur. Leurs inverses, notées Y_m , Y_s et Y_c , sont les mobilités du même nom :

$$Z_m = Z_s + Z_c$$

Eq. A5.10

La même expression en termes de mobilités s'écrit :

$$\frac{1}{Y_m} = \frac{1}{Y_s} + \frac{1}{Y_c}$$

Eq. A5.11

L'expression de la mobilité du système, obtenue à partir de la mesure de la mobilité et de la mobilité du capteur, s'exprime comme :

$$Y_s = \frac{Y_m}{1 - \frac{Y_m}{Y_c}}$$

Eq. A5.12

On constate bien que si la mobilité du capteur est grande par rapport à la mobilité directement mesurée, alors la mobilité du système est directement égale à la mobilité mesurée. La Figure A5.13 montre la mesure de la mobilité du capteur. Celle-ci a été mesurée en laissant le pot vibrant, muni de la tête d'impédance et de la tige d'excitation, vibrer "en l'air", sans contact.

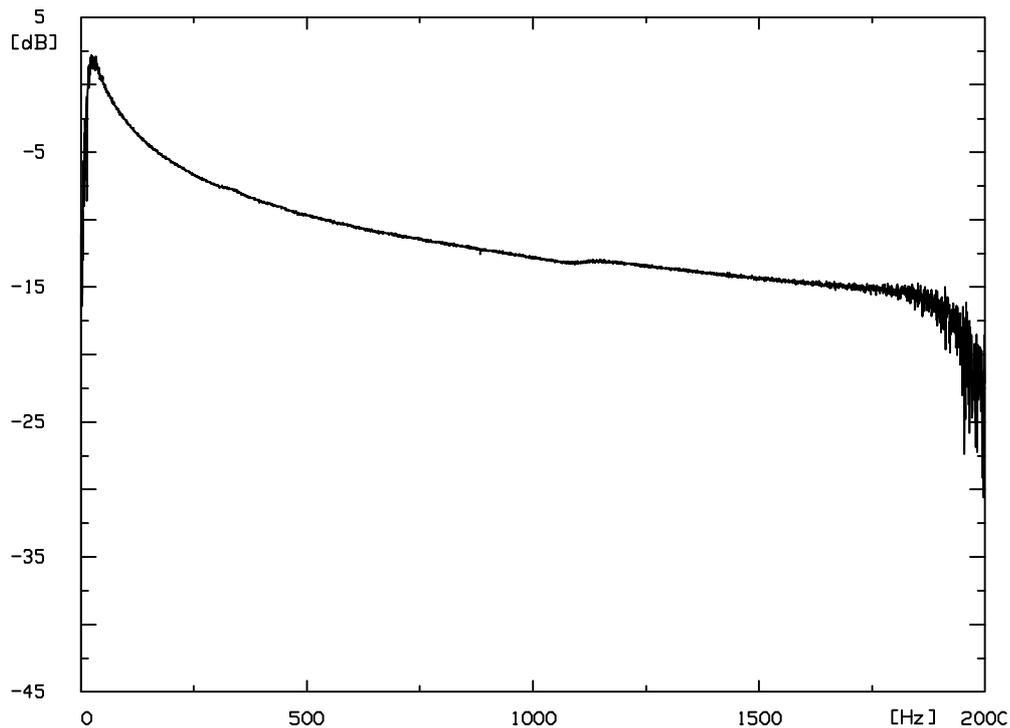


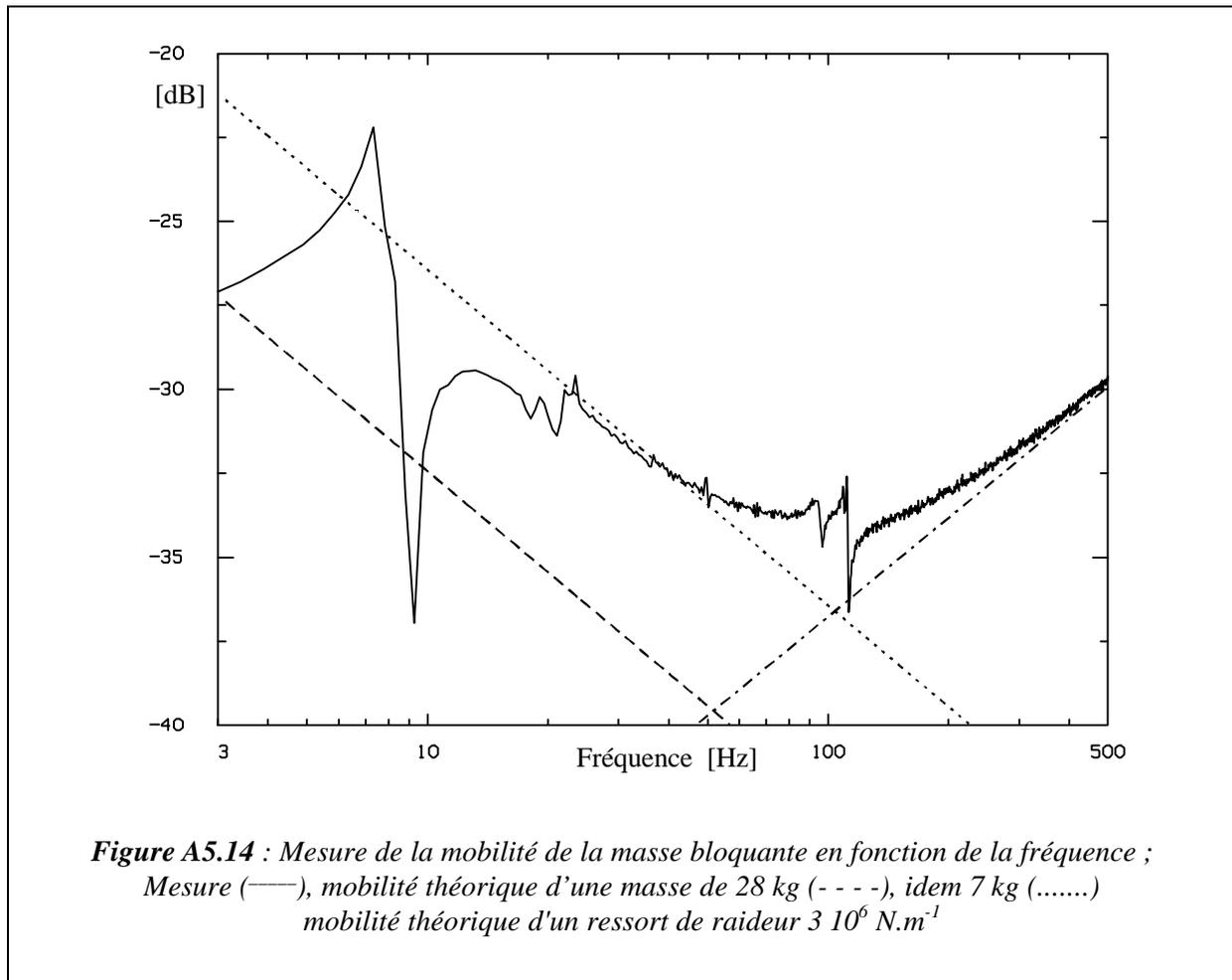
Figure A5.13 : Mesure de la mobilité de la tête d'impédance + la tige d'excitation

On constate un effondrement de la mobilité à partir de 1800 Hz environ. Les mesures seront donc à considérer avec circonspection au delà de cette valeur.

Toutes les mesures issues de la tête d'impédance sont corrigées par cette mesure.

A5.3.2. La masse bloquante

Suite aux problèmes constatés dans les très basses fréquences (cf. chapitre 5), la mesure de la mobilité d'entrée des masses bloquantes posées sur leur flèche a été effectuée. Pour cela, le pot vibrant, muni de la tête d'impédance a été placé contre la masse, là où habituellement en configuration découplée bloquée, la barrette de liaison vient s'appuyer. La mesure de mobilité, après la correction indiquée ci-dessus, est comparée aux expressions théoriques, de la masse réelle du dispositif expérimental (environ 28 kg) d'une part et à une masse de 7 kg d'autre part. Le résultat est présenté sur la Figure A5.14 suivante.



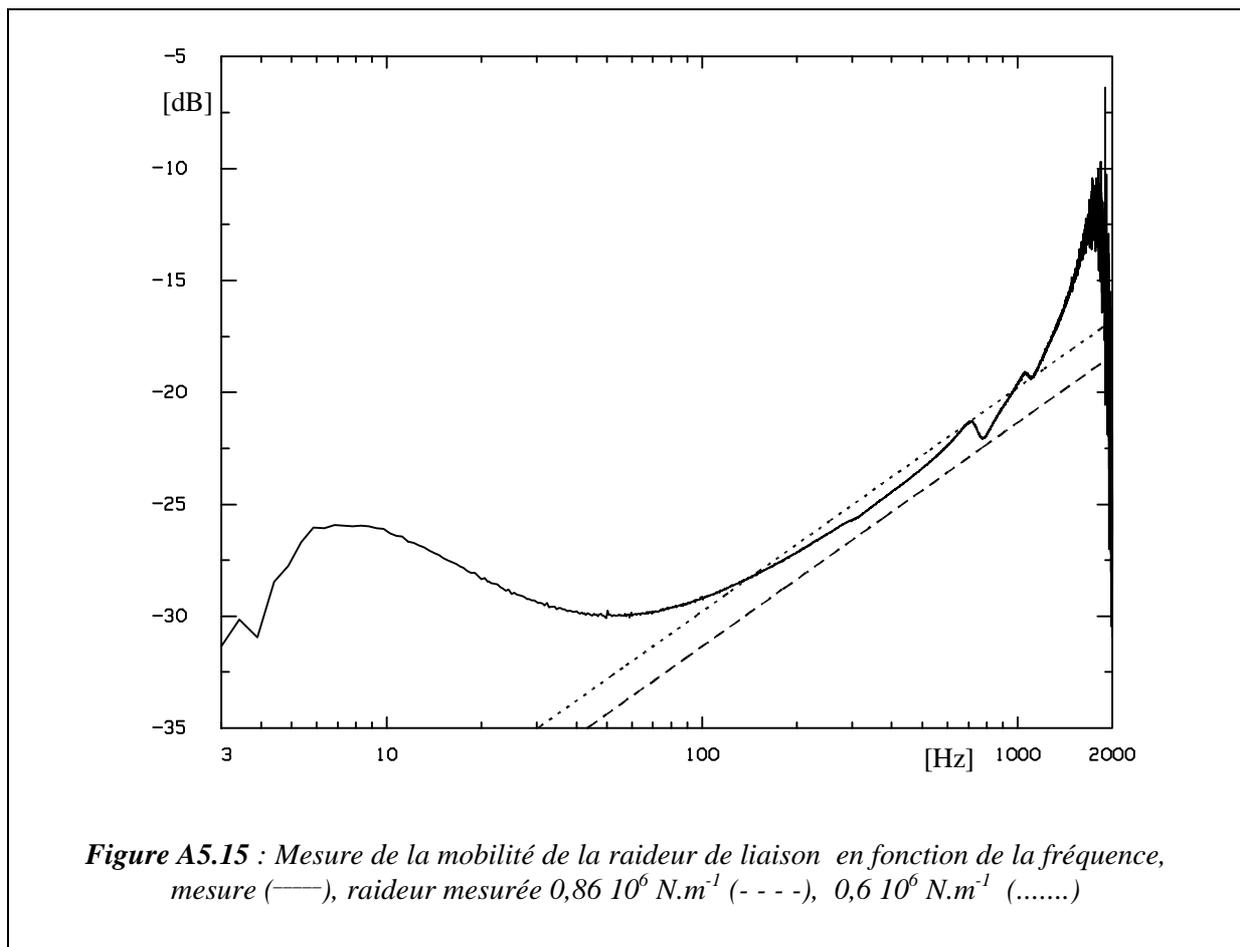
Le chapitre 5 ne présentait les courbes de mesures qu'à partir de 100 Hz. La justification était que la masse bloquante, posée sur sa flèche, ne remplissait pas son rôle en raison des modes de vibration de la flèche. Cette assertion se vérifie sur la Figure A5.14. En dessous de 30 Hz, le comportement de la masse bloquante est soumis à des fluctuations de grande amplitude (8 et 9 Hz) en raison d'un mode de vibration. Entre 10 et 30 Hz, il se produit encore quelques modes de moindre intensité, mais qui perturbent la mesure.

Autre constatation : la mobilité théorique associée à la masse de 28 kg est très inférieure à celle mesurée (qui se rapprocherait plutôt de celle d'une masse de 7 kg). Il est difficile de trouver une explication valable de ce phénomène. En revanche, la conséquence directe est que le système masse + liaison, lors de sa configuration découplée bloquée ne "voit" pas une masse de 28 kg, mais seulement 7 kg, et donc, cette condition n'est vérifiée que pour des fréquences supérieures à celle prévue.

Enfin, on voit apparaître une courbe de type raideur à partir de 150 Hz. Ceci est dû à la barrette d'excitation à tête arrondie qui permet de minimiser l'injection de moments dans la plaque. On verra au paragraphe suivant, que sa raideur est beaucoup plus grande que celle du ressort de liaison.

A5.3.3. Le ressort de liaison

L'investigation s'est portée sur le ressort de liaison, pour vérifier sa raideur à partir de la mesure de mobilité. Pour cela, la barrette a été fixée sur la tête d'impédance par l'intermédiaire d'un adaptateur (réalisé spécialement) de poids identique à la tige arrondie BK. La barrette a été ensuite appuyée contre le mur du laboratoire, qui en cet endroit, est épais de 40 cm, ceci afin d'éviter tout problème de blocage (cf. masses bloquantes). La Figure A5.15 montre cette mesure comparée à deux mobilités théoriques.



La première mobilité théorique reportée sur le graphique est celle correspondant à la raideur mesurée de la liaison. L'autre, plus faible, donne une estimation de la plage de valeurs dans laquelle la mesure in situ s'insère. Cette figure montre que le comportement en raideur de la mobilité ne commence réellement qu'aux alentours de 100 Hz. Au-delà, la raideur correspondant à la mesure varie entre plus ou moins $0,8 \cdot 10^6$ et $0,6 \cdot 10^6 \text{ N.m}^{-1}$. Pratiquement, elle n'est jamais aussi raide que ce que la mesure de la raideur de la barrette laissait penser. Enfin, entre 1000 et 2000 Hz, la raideur décroît rapidement. Cela vient du fait que l'on se

trouve à la limite supérieure des capacités de mesure du système (cf. A5.3.1.), mais aussi peut-être d'un effet local de déformation du support (le mur) qui engendre une apparente souplesse.

La conséquence est que la valeur de la raideur utilisée dans les calculs de recombinaison est trop grande par rapport à la réalité. En conséquence de quoi, on observe ainsi des valeurs propres de couplage plus fortes que ce qu'elles ne sont : on a pu s'en rendre compte dans le cas de la recombinaison simplifiée. Quel que soit le critère utilisé, la recombinaison donnait les mêmes résultats, signe d'un couplage faible, alors que la représentation des valeurs propres de couplage montrait certes un couplage parfois fort (aux alentours de 0 dB) mais cependant pas un couplage réellement faible.

La remarque a été faite que les niveaux des vitesses recomposées semblaient souvent surestimer le niveau de la vitesse directement mesuré. Cette surestimation de la raideur des ressorts pourrait en être la cause.

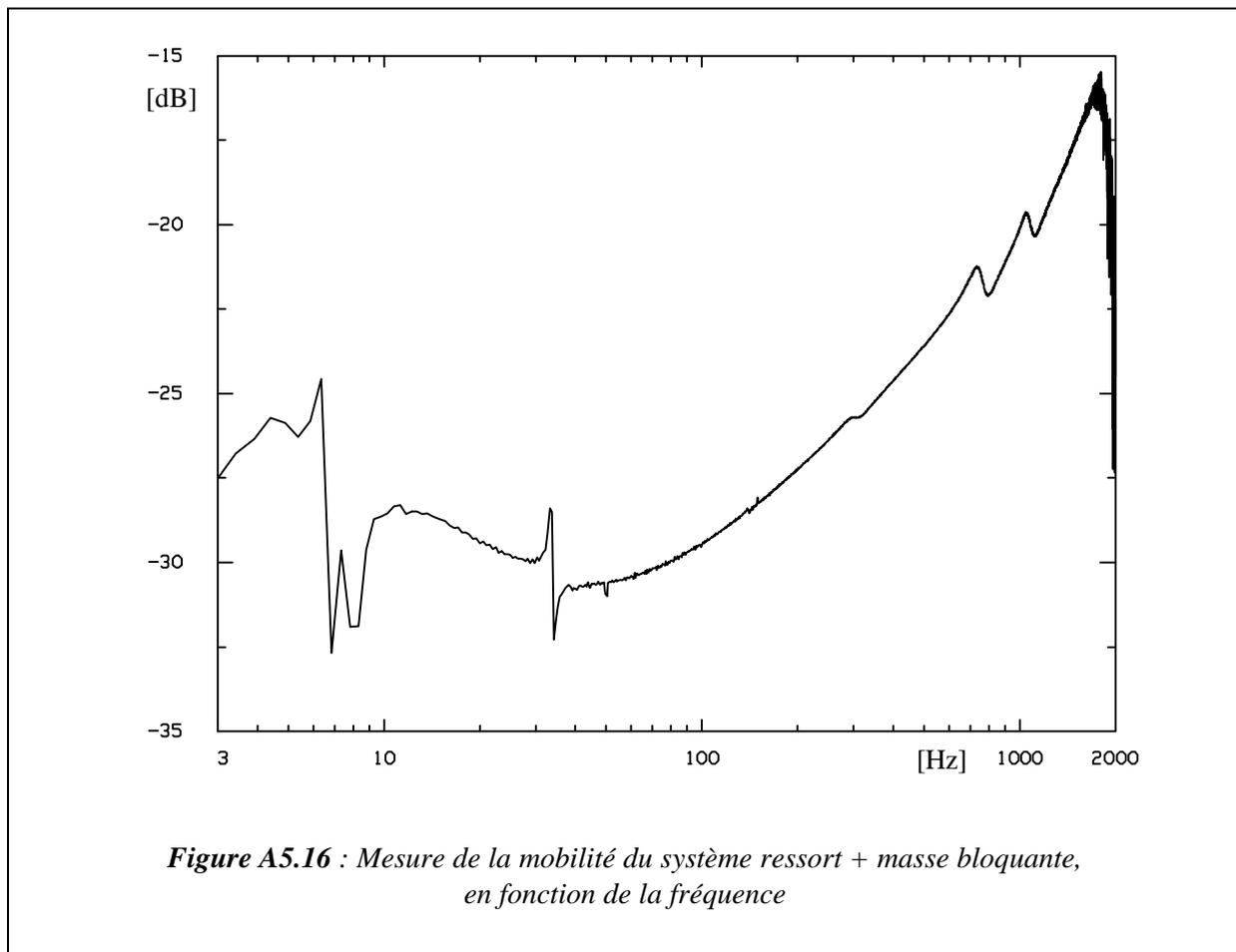
Il faut remarquer que si la barrette présente effectivement la raideur mesurée de $0,86 \cdot 10^6 \text{ N.m}^{-1}$ en situation, c'est-à-dire avec tout le montage expérimental (cf. §A5.1.4.), elle peut finalement se comporter légèrement différemment, sans compter que sa raideur dynamique est aussi probablement légèrement différente de sa raideur statique (c'est-à-dire celle qui a été mesurée).

A5.3.4. La condition “découplée bloquée”

On vient de constater que certaines conditions exigées par la théorie n'ont pas été remplies, blocage par la masse, constance de la raideur. Or, ces conditions sont primordiales pour assurer que la liaison est bien découplée bloquée. La question s'est posée de savoir si la mesure de la plaque découplée bloquée était fiable, et s'il n'y avait pas un autre moyen d'effectuer cette condition découplée bloquée autrement qu'en bloquant réellement les systèmes.

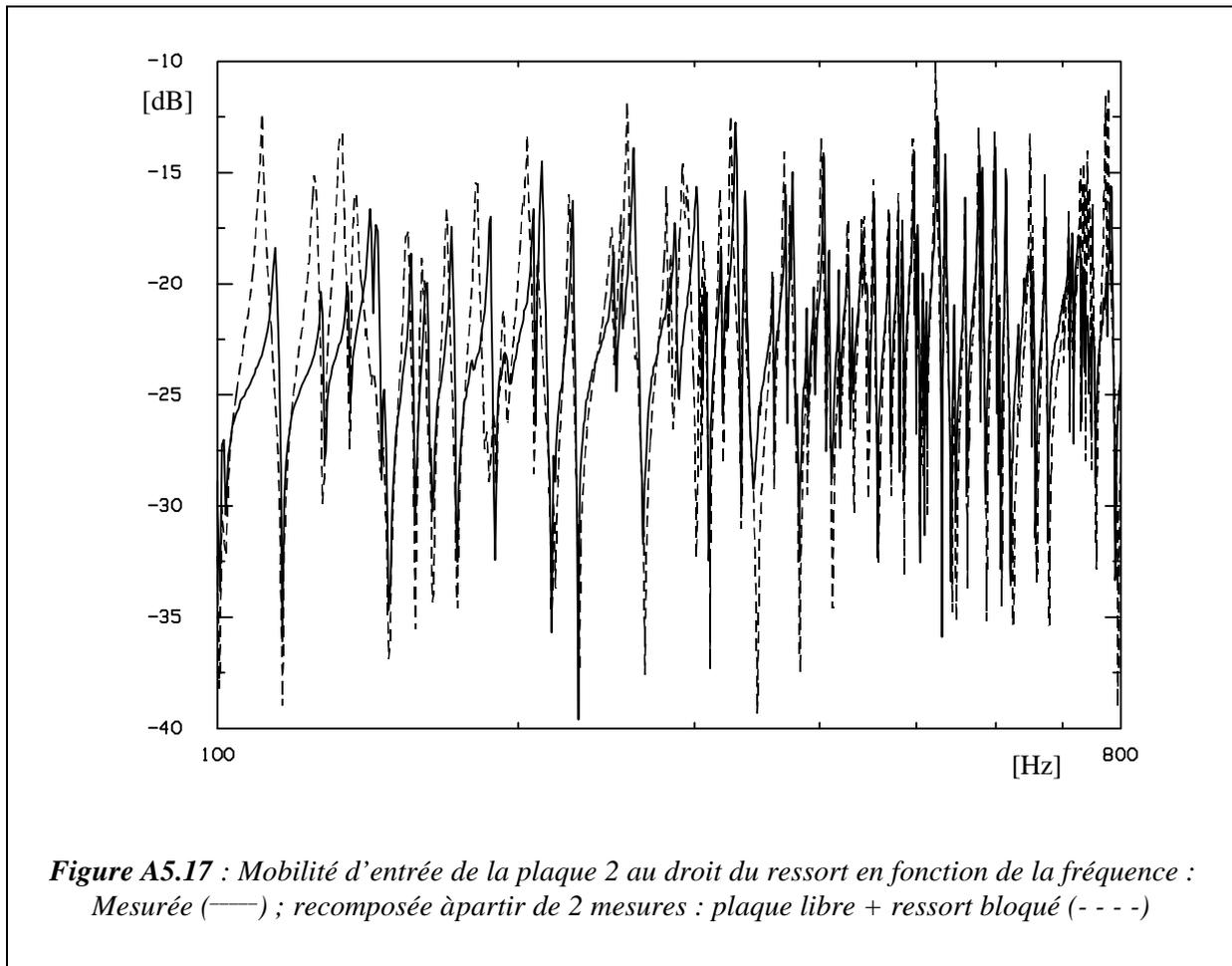
Il est bien sûr possible de répondre par l'affirmative à cette dernière question. La technique à utiliser est de reconstruire la mobilité de la plaque découplée bloquée à partir de la mesure de la mobilité de la plaque libre d'une part, et de la mesure du système bloquant d'autre part. Le système bloquant étant constitué de la masse bloquante et de la barrette de liaison. Sa mobilité peut elle aussi être mesurée à part, ou encore reconstruite à partir des valeurs théoriques de la masse et de la raideur. Enfin, elle est combinée avec la mobilité de la plaque libre.

Dans un premier temps, la mobilité d'entrée du système liaison + masse bloquante a été mesurée. La Figure A5.16 montre l'allure la mobilité en fonction de la fréquence :



Cette courbe reprend les éléments déjà évoqués auparavant, c'est-à-dire les modes de flèches aux basses fréquences, la pente décroissante de la masse, une résonance entre la masse et le ressort (vers 25 Hz), la pente ascendante de la raideur, et deux petites résonances vers 750 et 1100 Hz. Les deux petites résonances des hautes fréquences sont probablement dues aux masses conjuguées de la masse sismique de la tête d'impédance et de la tige d'excitation BK (le tout faisant environ 6 g).

La recombinaison avec de cette mobilité avec celle de la plaque 2 libre est comparée avec la mobilité de la plaque 2 découplée bloquée. Le résultat est sur la Figure A5.17. Deux remarques sont à faire : jusqu'à 400 Hz, on observe des différences de forme assez sensibles entre les deux courbes. Au delà de 400 Hz, tout rentre dans l'ordre avec un très bon rendu des niveaux et une excellente similitude de forme.

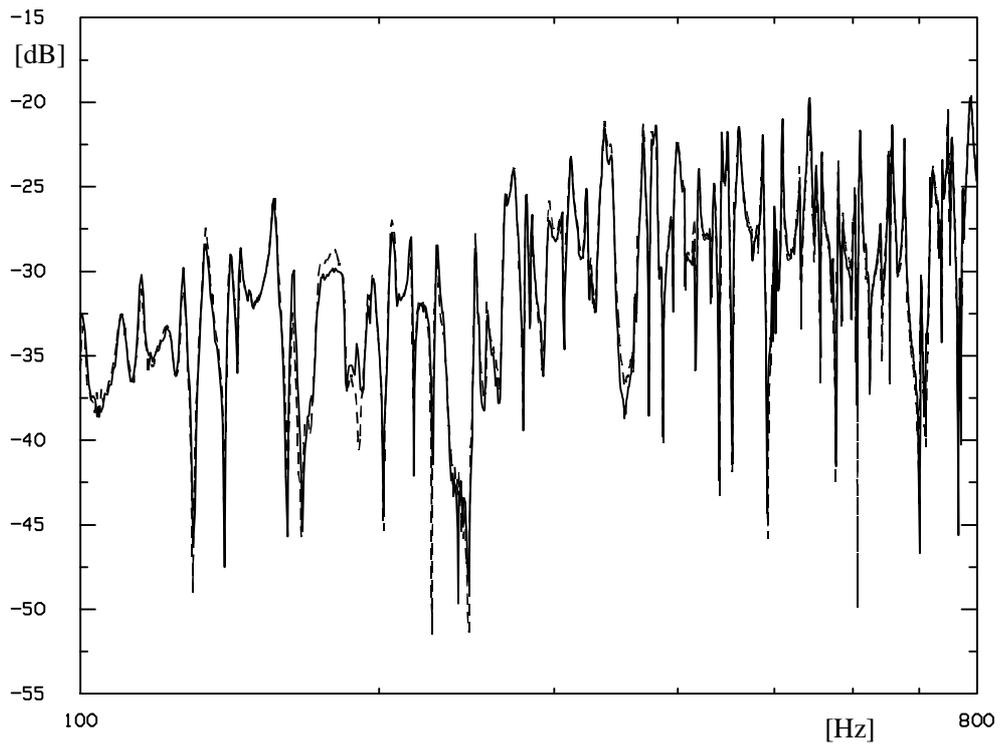


Bien que traitant la plaque 2, théoriquement bien bloquée par la masse bloquante, on est de nouveau confronté à la valeur charnière de 400 Hz.

A5.3.5. La réciprocité

La réciprocité, évoquée dans le § 5.3.1. se vérifie en comparant deux mesures où le point d'excitation et le point de mesure sont inversés. Cela se produit lors des mesures des mobilités de transfert entre deux points de couplage (dans le cas du couplage par 3 ressorts par exemple). La Figure A5.18 montre deux de ces mesures comparées. L'une d'entre elles est effectuée en excitant la plaque 2 au droit du ressort 3 et en mesurant au point de couplage 1, et l'autre, en excitant la même plaque au droit du ressort 1 et en mesurant au point de couplage 3. On constate qu'il y a superposition parfaite des deux mesures, ce qui signifie que malgré le changement de position du pot vibrant¹ et de l'accéléromètre de mesure, le résultat expérimental est fiable.

¹ Changement de pot vibrant qui doit être fait très précisément pour ne pas induire de dispersions entre les différentes mesures.



(première partie)

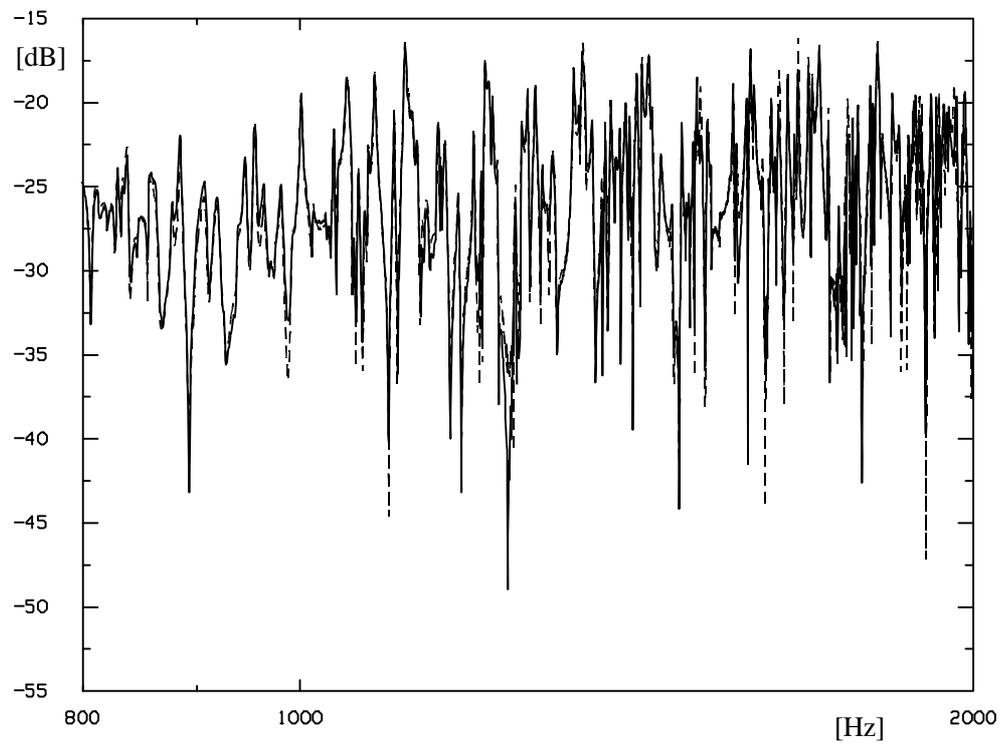


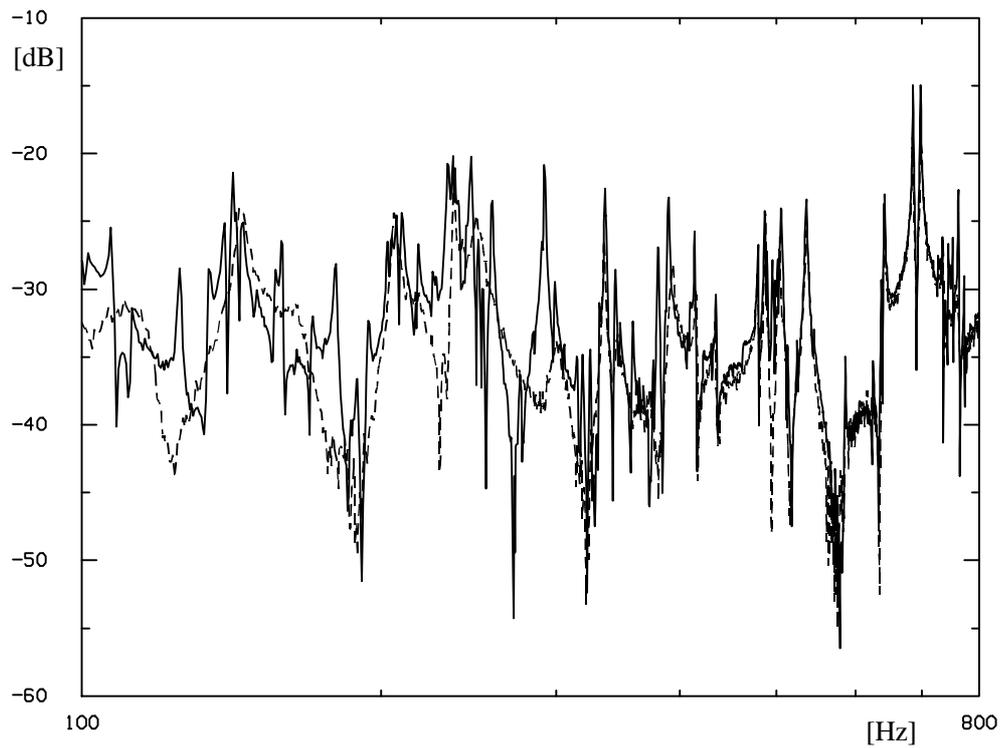
Figure A5.18 : Réciprocité de deux mesures de mobilités de transfert entre les ressorts 1 et 3, en fonction de la fréquence

A5.3.6. La vitesse de la plaque 1, couplée et découplée bloquée

Les mesures présentées au chapitre 5, qui comparent la vitesse au point M_1 sur la plaque 1, mesurée directement, et la même vitesse, obtenue par recombinaison, ont montré que les résultats obtenus sur la plaque 1 étaient bien souvent meilleurs que ceux de la plaque 2. L'explication est que la vitesse de la plaque 1 est pour une large partie composée de la vitesse de la plaque 1 découplée bloquée, et que cette dernière est souvent prépondérante par rapport à la part issue du couplage, puisque l'excitation se fait justement sur la plaque 1.

Les courbes présentées en Figure A5.19 comparent la vitesse de la plaque 1 couplée à celle de la plaque 1 découplée bloquée, dans la configuration de trois ressorts de couplage.

De l'observation de ces courbes, il faut retenir la très bonne adéquation qui existe entre elles aux hautes fréquences. En effet, dans cette zone fréquentielle, la valeur propre de couplage est généralement plus faible et donc, l'apport du couplage à la vitesse des systèmes couplés est limité. Au contraire, les basses fréquences montrent quelques différences entre les deux réponses, différences dues alors aux contributions de la vitesse de la plaque 2 par le ressort de couplage.



(première partie)

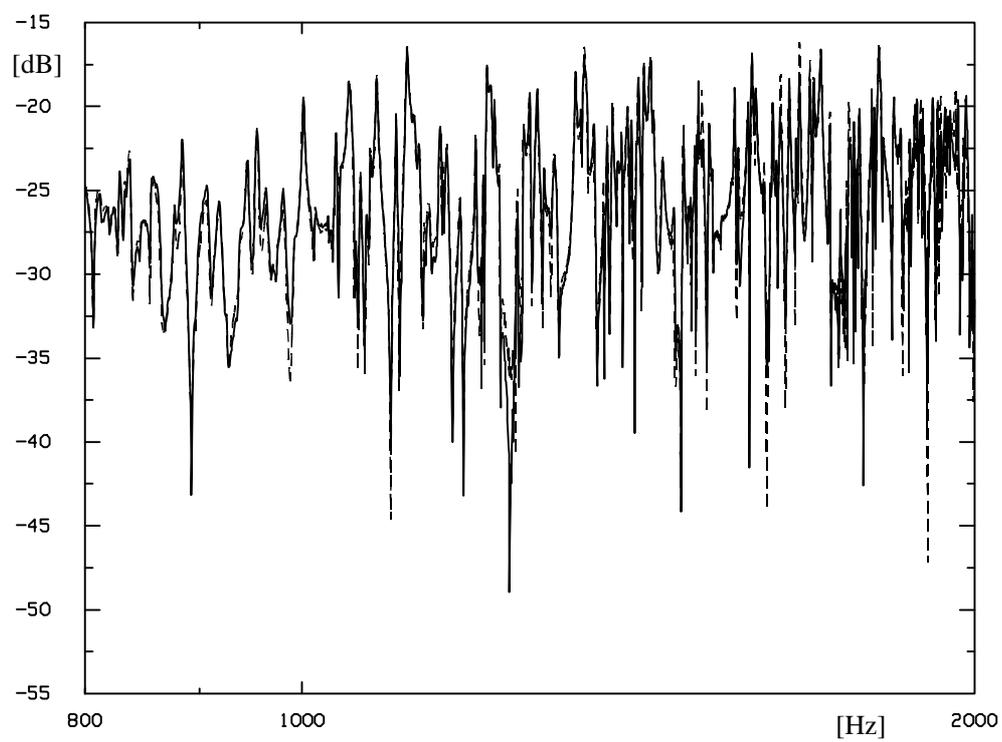


Figure A5.19 : Module de la vitesse de la plaque 1 couplée (—) et de la plaque 1 découplée bloquée (- - -) en fonction de la fréquence

Résumé

La caractérisation fine des mécanismes mis en jeu lors du couplage de systèmes vibrants est indispensable pour réduire le volume des calculs (ou le nombre de données à manipuler) nécessaires à la description correcte des phénomènes vibratoires résultants. Dans ce cadre, une nouvelle méthodologie a été développée puis appliquée au cas de deux plaques couplées par un ou plusieurs ressorts.

Fondée sur une approche modale et un formalisme vectoriel, elle s'appuie sur l'exploitation d'une matrice de couplage adimensionnelle qui décrit les échanges entre les deux plaques. Cette matrice admet autant de valeurs propres de couplage (quantités totalement déterministes) que de ressorts entre les plaques. Ces valeurs propres sont représentatives de la force du couplage tandis que les vecteurs propres indiquent les chemins modaux de transmissions. L'utilisation de ces quantités propres permet de reconstruire l'état vibratoire des plaques après couplage connaissant leur état avant couplage (en configuration découplée bloquée).

Une méthode simplifiée est développée dans le cas du couplage multiple. Le chemin de transmission dominant est identifié par l'examen et le tri des valeurs propres de couplage. Le fait de ne garder que la contribution correspondant à ce chemin modal dominant donne d'excellents résultats, l'erreur maximum par rapport à la solution de référence atteignant 3 dB aux plus hautes fréquences.

L'application expérimentale de cette méthodologie est possible puisque les valeurs propres de couplage sont mesurables. La méthode s'apparente à une approche de type mobilité, à la différence près que les grandeurs à mesurer sont en configuration découplée bloquée, ce qui permet d'éviter les fréquences singulières inhérentes à l'approche par mobilité classique. Dans des conditions de couplage multiple, l'application de la méthode simplifiée confirme la qualité des résultats obtenus précédemment de façon numérique.

Abstract

Extensive calculations - or a large amounts of data - are necessary to accurately define the state of vibratory systems when coupled. In order to reduce that calculation volume, it is necessary to properly characterise the mechanisms involved in the coupling of vibratory systems. Within this scope, a new methodology has been developed and applied to the case of two plates coupled by one or several springs.

Based on a modal approach and a vectorial representation, the method relies on an adimensional matrix -the coupling matrix- which describes the exchanges between the two plates. The number of coupling eigenvalues contained in the matrix corresponds to the number of springs between the two plates. These eigenvalues -purely deterministic quantities- represent the coupling strength, while the eigenvectors describe the modal transmission paths. The knowledge of the vibratory state of the plates after the coupling is determined from the knowledge of their initial state (in a blocked uncoupled configuration) and the coupling eigenquantities.

In case of several couplings, a simplified method has been developed. The dominant transmission path is obtained after close observation and classification of the coupling eigenvalues. Very good results are obtained when only the modal dominant path is taken into account: compared to the reference solution, the maximal error hardly reaches 3 dB at high frequencies.

Since the coupling eigenvalues are measurable, the experimental approach of such a methodology is possible. This method is similar to a mobility approach, except that the measured quantities are blocked and uncoupled. Thus the singular frequencies, intrinsic to the classical mobility approach, seem to be avoided here. In case of several couplings, the use of the simplified method confirms the good results previously obtained from a numerical calculation.